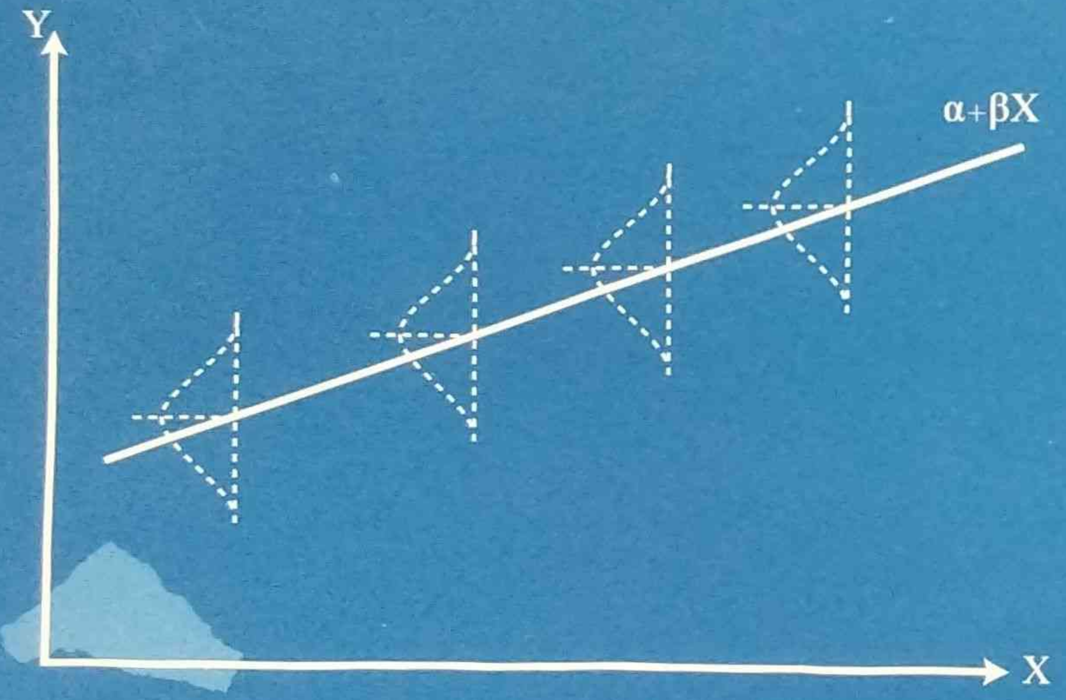
چاپ پانزدهم
ویرایش جدید
با پاسخ به تمرین‌ها

روش‌های آماری
و
شاخص‌های بهداشتی



دکتر کاظم محمّد

دکتر حسین ملک افضلی

بسم الله الرحمن الرحیم

روشهای آماری و شاخص‌های بهداشتی

دکتر کاظم محمد

دکتر حسین ملک افضلی

محمد، کاظم، ۱۳۱۷-
روشهای آماری و شاخصهای بهداشتی /کاظم محمد، حسین ملک افضلی
تهران: دریچه نو (سلمان)، ۱۳۹۲.

۳۶۰ص : جدول، نمودار.

ISBN: 964-91035 – 2 – x: ریال ۲۰۰،۰۰۰

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیپا.

این کتاب در سال ۱۳۶۳ به صورت جلدی منتشر شده است.
واژه‌نامه.
چاپ پانزدهم
۱. آمار. ۲. بهداشت--روشهای آماری. ۳. آمار زیستی. الف. ملک افضلی، حسین،
۱۳۱۸- ب:عنوان.

۹ر ۳م/QA۲۷٦ ۵۱۹/۵۰۲٤٦۱

۱۳۹۲

کتابخانه ملی ایران ۷۸-۱۲۸٦۸م

نام کتاب: **روشهای آماری و شاخصهای بهداشتی**

نویسندگان: **دکتر کاظم محمد - دکتر حسین ملک افضلی**

ناشر: **دریچه نو**

تیراژ: **۵۰۰۰ جلد**

نوبت چاپ: **پانزدهم، ۱۳۹۲**

بهای کتاب: **۲۰۰،۰۰۰ ریال**

شابک: **۹۶۴-۹۱۰۳۵-۲-x**

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار

کتاب روش‌های آماری و شاخص‌های بهداشتی از ابتدا به نحوی تنظیم شده بود که هم به عنوان کتاب درسی برای دانشجویان علوم پزشکی کشور قابل استفاده باشد و هم مرجع مقدماتی جامع و مناسبی برای محققین علوم زیستی و پزشکی باشد.

گرچه در چاپ مکرر کتاب کم و بیش به اضافه کردن مطالب و مسائل جدید توجه شده است لیکن در چاپ چهاردهم به بعد تغییرات اساسی در تنظیم فصول و محتوای کتاب ایجاد شده است. فصل‌های اول و دوم کتاب به بیان آمار توصیفی اختصاص یافته است و در فصول سوم و چهارم به بیان مبانی احتمال و معرفی توزیع‌های متعارف در علم آمار اقدام شده است. بدین ترتیب چهار فصل اول کتاب را می توان به عنوان یک واحد درسی در دوره‌های کاردانی تدریس کرد. فصول پنجم، ششم، هفتم و هشتم به ترتیب به بیان برآورد، آزمون‌های آماری پارامتری و بدون پارامتر، آنالیز واریانس و آنالیز همبستگی و رگرسیون اختصاص دارد و می توان از این چهار فصل به عنوان آمار تحلیلی به ارزش ۲ واحد درسی در دوره‌های کارشناسی یا کارشناسی ارشد استفاده کرد. فصل نهم و دهم که به طور کلی نسبت به چاپ‌های قبل تغییر یافته است به بیان انواع مطالعات اپیدمیولوژی و تحلیل آنها می‌پردازد. مطالب این دو فصل به طور عمده در برنامه درسی دانشجویان فوق‌لیسانس منظور شده است و ارزش آن معادل یک واحد است. بدین ترتیب مطالب این کتاب به ارزش ٤ واحد به تناسب فصول آن برای مقاطع تحصیلی کاردانی، کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته‌های علوم بهداشتی و پزشکی و همچنین دانشجویان رشته‌های پزشکی، دندانپزشکی، پیراپزشکی و داروسازی قابل استفاده می‌باشد.

از خانم محبوبه پارسائیان دانشجوی دکتری آمار زیستی که در تصحیح اغلاط چاپ پیشین کتاب و تنظیم پاسخ به تمرین ها زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند صمیمانه تشکر می‌شود.

مؤلفین

آذر ۱۳۹۲

فصل اول
مفهوم آمار و بیان توزیع نتیجه مشاهدات

۱-۱. مفهوم آمار

مفهومی که مردم عادی از آمار دارند شامل گردآوری مقداری اطلاعات و نمایش آنها به صورت جدول و نمودار است و در یک مفهوم وسیعتر ارائه پاره‌ای مشخصات عددی چون میانگین، درصدها و غیره است ولی می‌توان تعریف جامع‌تر آمار را بصورت زیر بیان نمود.

آمار علمی است که مشخصات جامعه‌ها[1] را از نظر کمی ولی با در نظر گرفتن کیفیت مشخص کننده‌های آن جامعه مورد بررسی قرار می‌دهد در واقع آمار داده‌های عددی را جمع‌آوری، نمایش و تحلیل می‌کند. گرچه مطالب این کتاب بیشتر متوجه تحلیل مطالب است ولی به منظور فهم این مسائل لازم است فصول ابتدایی کتاب به چگونگی توصیف اطلاعات اختصاص یابد.

در مرحله تحلیل آماری با مسئله قضاوت درباره فرضیه های مختلف مواجه می‌شویم که قسمت اصلی تئوری استنتاج آماری را تشکیل می‌دهد. قضاوتهای آماری با قضاوتهایی که در رشته‌های مختلف علوم ریاضی بکار می‌رود تفاوت اساسی دارد برای روشن شدن مطلب این تفاوت را با ذکر یک مثال روشن می‌سازیم. اگر بررسی تاثیر انسولین در پایین آوردن قند خون مورد نظر باشد روش استاندارد شامل انجام آزمایش روی افراد مختلف، جمع‌آوری اطلاعات و آنگاه اخذ تصمیم بر پایه این مشاهدات است. مثلاً اگر ۵۰ فرد را مورد مطالعه قرار دهیم و انسولین موجب پایین آوردن قند خون در کلیه افراد شود عقل سلیم حکم می‌کند که فرضیه بی‌تاثیر بودن انسولین در قند خون را مردود بدانیم. اگر در این آزمایش، انسولین، قند خون ۴۹ نفر و یا حتی ۴۸ نفر را پایین آورد، بازهم عقل سلیم اجازه نخواهد داد که بدلیل مشاهده یک یا دو مورد در جهت منفی، فرضیه بی‌تاثیر بودن انسولین را بپذیریم چه ممکن است مشاهده موارد منفی نتیجه تاثیر عوامل بی‌شماری

---

۱. هرگاه اشیاء یا نمودها اقلا نسبت به یک خاصیت گردهم در نظر گرفته شوند یک جامعه آماری نامیده می‌شوند.

باشد که از طرف محقق قابل کنترل نمی‌باشد. ذکر این نکته ضروری است که اگر در مثال فوق نسبت افرادی که با تزریق انسولین، قند خون آنها پایین می‌آید به اندازه‌ای نباشد که بتوان فرضیه بی‌تاثیر بودن انسولین را رد کرد دلیل برای اثبات بی‌تاثیر بودن انسولین نیز نخواهد بود.

چنانچه ملاحظه گردید قضاوت آماری صرفاً براساس مشاهدات استوار است در حالی که در علوم ریاضی هرگز چنین قضاوتهایی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد و همین که موردی مشاهده شود که با فرضیه مورد بحث مغایرت داشته باشد درست نبودن فرضیه به اثبات می‌رسد.

۱-۲. سنجش مشاهدات و انواع آن

بررسی هر پدیده شامل مشاهده، سنجش و ثبت خصوصیات آن است. نتیجه سنجش خصوصیات اشیاء یا افراد مورد مطالعه را بسته به ماهیت آن خاصیت می‌توان در چهار شکل اسمی[1]، رتبه‌ای[2]، فاصله‌ای[3] و نسبتی[4] در نظر گرفت.

نتیجه سنجش پاره‌ای از خصوصیات چنان است که تنها می‌توان براساس آن شیء یا فرد مورد مطالعه را به گروهی منتسب نمود و نام آن گروه را به آن نهاد. مثلا در مطالعه جنس و یا گروه خونی می‌توان شخص مورد نظر را تحت عنوان مرد یا زن گروه خونی A یا B یا AB یا O مشخص کرد. این خصوصیت یا صفت را صفت اسمی می‌خوانند زیرا براساس این سنجش تنها می‌توان نامی را برای فرد مورد مطالعه در رابطه با خاصیت مورد نظر انتخاب کرد.

بدیهی است براساس این سنجش نمی‌توان اندازه خاصیتی را در فردی از فرد دیگر کمتر یا بیشتر دانست. در پاره‌ای از مشاهدات می‌توان نتیجه سنجش یک خاصیت را با بیان رتبه فرد یا شیء در رابطه با سایر افراد بیان کرد. مثلا برای سنجش یک بیماری ممکن است براساس ضوابطی فرد را در یکی از ۳ گروه خفیف، متوسط یا شدید قرار داد بدیهی است در این مورد نمی‌توان گفت که شدت بیماری در گروه متوسط دو برابر ضعیف و یا این که گروه بیماران به همان اندازه از گروه خفیف شدیدترند که از گروه شدید خفیف‌ترند. به عبارت دیگر نمی‌توان فاصله دو رتبه متمایز و یا نسبت اندازه بین آنها را مشخص کرد. ولی به هر حال این نوع صفت از خاصیت صفت اسمی برخوردار می‌باشد.

---

1. Nominal
2. Ordinal
3. Interval
4. Ratio

در نوعی دیگر از مشاهدات می‌توان با بکار بردن یک مبداء قراردادی نتیجه سنجش را برحسب واحدهای ثابت و معین اندازه‌گیری کرد و در نتیجه فاصله دو شیء یا دو فرد را از نظر صفت مورد بررسی معین کرد. ولی نظر به اینکه این نوع اندازه‌گیری فاقد صفر ذاتی می‌باشد نمی‌توان نسبت اندازه خاصیت مورد مطالعه را در افراد مشخص کرد به همین دلیل این نوع اندازه‌ها را اندازه‌های فاصله‌ای می‌نامند مثلاً برای اندازه‌گیری حرارت اشیاء از درجات معین و ثابتی (درجات میزان الحراره سانتی گراد یا فارنهایت) استفاده می‌کنیم و بدین ترتیب می‌توانیم فاصله دو اندازه را با توجه به این درجات دقیقاً مشخص کنیم ولی به دلیل عدم وجود صفر حقیقی (صفر به معنی نبودن حرارت) نمی‌توان مثلا مقدار حرارت جسمی که درجه حرارتش ۸۰ سانتی‌گراد است دو برابر حرارت جسمی دانست که درجه حرارتش ۴۰ درجه سانتی‌گراد است. بدیهی است خواص اندازه‌های اسمی و رتبه‌ای برای این نوع اندازه‌گیری صادق می‌باشد.

آخرین نوع از انواع نتیجه سنجش مشاهدات اندازه‌هایی است که براساس آن نه تنها می‌توان فرد مورد مطالعه را به رده‌ای منتسب کرد یا رتبه آن را معین نمود و یا فاصله آن را در رابطه با افراد دیگر معین کرد بلکه می‌توان نسبت اندازه خاصیت مورد مطالعه را در دو فرد مشخص کرد چه برخلاف اندازه‌های فاصله‌ای این اندازه‌ها از صفر ذاتی برخوردار می‌باشند. مثلاً در مورد طول یک شیء مفهوم ذاتی صفر کاملاً روشن است و بدین ترتیب اگر طول شیء ۸۰ سانتیمتر و شیء دیگری ۴۰ سانتیمتر باشد می‌توان طول شیء اول را ۲ برابر شیء دوم دانست.

نکته مهم اینکه معمولاً اندازه‌های اسمی و رتبه‌ای تحت عنوان اطلاعات کیفی و اندازه‌های فاصله‌ای و نسبتی تحت عنوان اطلاعات کمی نامگذاری شده‌اند.

مشاهداتی که نتیجه سنجش آن کمّی است ممکن است از نوع کمیت پیوسته و یا گسسته باشد. کمیت پیوسته کمیتی است که بتواند بین دو مقدار خود تمامی اعداد حقیقی ممکن را اختیار کند. طول قد و وزن بدن نمونه‌هایی از کمیت پیوسته می‌باشند.

کمیت گسسته کمیتی است که بتواند به عنوان مقادیر خود مجموعه شمارش پذیراعداد و یا زیرمجموعه ای از آن را اختیار کند. تعداد افراد خانوار، تعداد دندان های فاسد و نسبت باسوادان در روستا نمونه هایی از کمیت گسسته می باشند.

بسیاری از روشهای آماری را می‌توان به طور یکسان در مورد نتایج مربوط به سنجشهای نسبتی، فاصله‌ای، رتبه‌ای و یا اسمی بکار برد. ولی در پاره‌ای موارد روشهای آماری متفاوت می‌گردد و این تفاوت نه تنها در کاربرد روشها است، بلکه تفسیر واژه‌های آماری در رابطه با اینکه این داده‌ها مربوط به خاصیتهای کاملاً قابل اندازه‌گیری، مقیاس و یا رتبه است، متفاوت می‌گردد.

۱-۳. گروه بندی نتیجه مشاهدات و بیان آن توسط جدول

پس از جمع‌آوری مشاهدات به منظور درک بهتر داده‌ها، لازم است حاصل مشاهدات را با توجه به پاره‌ای خصوصیات صفت مورد مطالعه در گروه‌های کاملا متمایز قرار داد. صفات کیفی چون جنس، نژاد، وجود یا عدم وجود بیماری را می‌توان به آسانی گروه بندی نمود زیرا در اینگونه صفات امکانات مختلف محدود است و شخص مورد مطالعه مرد یا زن، سفید یا غیرسفید، بیمار یا سالم است. در صفات کیفی وقتی انتخاب گروه به قضاوت شخص مربوط باشد دیگر مسئله گروه بندی به سادگی فوق نخواهد بود. مثلا در مورد شدت بیماری با وجود مشخص شدن تعاریف، اشتباهات فردی در انتساب اشخاص به یکی از گروه‌ها تاثیر می‌گذارد. در مشاهداتی که کمیت حاصل به صورت اندازه‌های گسسته، بیان می‌گردد انتخاب گروه، نسبتا آسان است. زیرا معمولاً تعداد گروه‌ها محدود و متمایز است و در انتساب افراد به یکی از گروه‌ها اشکالی ایجاد نمی‌شود. مثلا توزیع افراد یک جامعه بر حسب تعداد دفعاتی که در مدت معینی جهت معاینه و معالجه به یک مرکز بهداشتی مراجعه می‌کنند در گروه‌های یک بار، دوبار و بیشتر کار ساده‌ای است.

در مشاهداتی که کمیت حاصل به صورت اندازه‌های پیوسته بیان می‌گردد در نظر گرفتن نکاتی، به هنگام گروه بندی ضروری است. به هر حال گروه بندی، با هر فاصله‌ای باشد پاره‌ای اطلاعات راجع به اندازه‌گیری از دست می‌رود. مثلا با انتخاب ۱۰۰۰ تا ۲۰۰۰ گرم به عنوان یکی از گروه‌های وزن بدن نوزاد نمی‌توان تعداد نوزدانی را که ۱۰۰۰، ۱۱۰۰ و ۱۲۰۰ گرم الی آخر وزن دارند مشخص نمود. ولی به طور کلی اگر در گروه بندی نتایج حاصل از مشاهدات از ۸ تا ۱۵ گروه استفاده شود اطلاع قابل توجهی از دست نخواهد رفت. در اغلب مطالعات بهتر است که فاصله گروهها را یکسان انتخاب کنیم. با وجود این در مطالعات اپیدمیولوژیک فاصله‌های نامساوی کاملا متداول و مرسوم است. مثلا گروه بندی بیماران سرطانی به فواصل مساوی ده سال مطلوب نیست زیرا تعداد ناچیزی از بیماران در دهه‌های اول عمر قرار می‌گیرند.

معمولا وقتی توزیع افراد برحسب کلیه علل مرگ مورد نظر باشد توصیه می‌شود که از گروه‌بندی سنی[1] زیر استفاده گردد.

---

۱. در گروهبندی سنی مورد بحث در واقع طول عمر مورد نظر است و مثلا فاصله ٤-١ سال شامل کلیه افرادی است که طول عمر آنها بین یک سال تمام تا مرز ۵ سال است. بدین ترتیب فردی با طول عمر ٤ سال و ۱۱ ماه و ۲۹ روز در این گروه قرار می‌گیرد.

زیر یکسال	۴۴ – ۲۵ سال
۴–۱ سال	۶۴ – ۴۵ سال
۱۴ – ۵ سال	+ ۶۵ سال
۲۴–۱۵ سال	

اعداد زیر مربوط به اندازه‌گیری ظرفیت حیاتی ۸۹ مرد ۵۰ – ۴۰ ساله است که به فواصل نیم لیتری گروه‌بندی شده و نتیجه آن در جدول ۱ – ۱ آمده است.

۳/۵۶	۴/۵۷	۴/۸۱	۳/۸۹	۶/۱۶	۴/۵۷	۵/۱۵
۴/۶۶	۶/۸۴	۵/۸۹	۴/۸۸	۴/۴۸	۵/۱۷	۵/۸۹
۵/۵۱	۳/۸۰	۴/۵۹	۵/۲۲	۴/۱۶	۵/۲۰	۴/۲۷
۵/۵۱	۴/۴۸	۵/۳۱	۵/۷۱	۳/۹۱	۶/۳۷	۳/۶۹
۴/۱۸	۵/۸۰	۴/۹۰	۵/۰۴	۵/۲۰	۳/۳۷	۳/۸۰
۵/۸۷	۳/۶۰	۴/۴۳	۴/۷۲	۴/۷۵	۵/۴۹	۴/۸۴
۵/۰۲	۴/۱۸	۳/۳۵	۴/۵۹	۴/۷۵	۳/۲۸	۴/۰۰
۴/۶۱	۴/۶۶	۵/۳۸	۳/۶۴	۴/۱۸	۴/۱۴	۴/۵۴
۴/۵۷	۵/۲۶	۵/۷۴	۵/۹۶	۵/۶۲	۳/۴۴	۳/۴۶
۴/۲۷	۴/۳۶	۴/۲۵	۶/۶۸	۵/۳۸	۴/۸۶	۴/۳۹
۴/۴۳	۳/۹۱	۷/۵۱	۵/۰۶	۵/۷۶	۳/۷۱	۵/۷۶
۶/۱۴	۴/۶۳	۳/۶۷	۴/۸۶	۲/۸۸	۴/۳۲	۵/۲۹
		۴/۵۹	۵/۲۲	۶/۱۴	۵/۴۹	۵/۵۱

جدول شماره ۱ – ۱. توزیع فراوانی ۸۹ مرد ۵۰ – ۴۰ ساله برحسب ظرفیت حیاتی منطقه .... سال ....

ظرفیت حیاتی برحسب لیتر	فراوانی مطلق		فراوانی تجمعی	
	تعداد	درصد	تعداد	درصد
۲/۵۰–۲/۹۹	۱	۱/۱	۱	۱/۱
۳/۰۰ –۳/۴۹	۵	۵/۶	۶	۶/۷
۳/۵۰–۳/۹۹	۱۱	۱۲/۳	۱۷	۱۹/۱
۴/۰۰–۴/۴۹	۱۶	۱۸/۰	۳۳	۳۷/۱
۴/۵۰–۴/۹۹	۲۰	۲۲/۵	۵۳	۵۹/۶
۵/۰۰– ۵/۴۹	۱۶	۱۸/۰	۶۹	۷۷/۵
۵/۵۰–۵/۹۹	۱۳	۱۴/۶	۸۲	۹۲/۱
۶/۰۰–۶/۴۹	۴	۴/۵	۸۶	۹۶/۶
۶/۵۰–۶/۹۹	۲	۲/۳	۸۸	۹۸/۹
۷/۰۰–۷/۴۹	۰	۰/۰	۸۸	۹۸/۹
۷/۵۰–۷/۹۹	۱	۱/۱	۸۹	۱۰۰/۰
جمع	۸۹	۱۰۰/۰	–	–

نتیجه نهایی بدست آمده از گروه بندی فوق، بیان توزیع فراوانی‌ها را به صورت جدول منعکس می‌سازد. باید متذکر شد که بجای تعداد افراد هرگروه ممکن است از نسبت افـراد در آن گـروه کـه فراوانی نسبی آن گروه نامیده می‌شود استفاده کرد. و یا در بعضی از مـوارد توزیـع افـراد جامعـه را نسبت به صفت یا صفات مورد بررسی بصورت تجمعی بیان نمود. توصیه مـی‌شـود کـه در تنظـیم جدول نکات زیر مورد توجه قرار گیرد.

الف. باید جدول را حتی‌الامکان بصورت ساده ارائه نمود. به عبارت دیگر بیان دو یا سه جدول ساده برنمایش یک جدول بزرگ که شامل متغیرهای زیاد است ارجحیت دارد.

ب. جدول باید گویای محتوای خود باشد بدین منظور لازم است کلیه علائم و نشانه‌هـایی کـه در جدول بکار رفته است در زیر جدول مشخص گـردد و بـه عـلاوه کلیـه سـتونها و سـطرها نـام گذاری و واحد هر یک مشخص شود. و بالاخره در نوشتن عنوان جدول از جمله کوتاهی که شامل مفاهیم چه، کجا و چه وقت است، استفاده گردد.

ج. باید برای ستونها و سطرها، ستون و سطر جمع منظور گردد و با توجه به اهمیـت جمـع، در جدول، اولین و یا آخرین ستون یا سطر را به جمع اختصاص داد.

د. لازم است در زیر جدول به ذکر منبع اطلاعات جدول اقدام گردد تا خواننـده بتوانـد اعتمـاد خود را به محتوای جدول ارزیابی نماید.

هـ . لازم است برای هر جدول، شماره‌ای در نظر گرفته شود تا به آسانی بتـوان بـا بیـان شـماره جـدول توجه خواننده را به جدول مورد نظر جلب نمود. جدول ۱–۲ نمونه‌ای از شکل یک جدول کامل است.

جدول ۱-۲. توزیع فروانی بستری شدگان بیمارستان .... در سال.... برحسب سن، جنس و محل سکونت

سن (سال)	محل سکونت و جنس								
	تهران			شهرستان‌ها			جمع		
	مرد	زن	جمع	مرد	زن	جمع	مرد	زن	جمع
کمتر از یکسال									
۱-۴									
۵-۹									B
۱۰-۱۴		A							
.									
.									
.									
جمع				C					

منبع: ...

در جدول ۱-۲ A معرف تعداد کل زنهای ۱٤ – ۱۰ سال تهرانی است که در بیمارستان بستری شده‌اند، B معرف تعداد کل ۹-۵ ساله‌هایی است که در بیمارستان بستری شده‌اند و C معرف تعداد کل مردهای شهرستانی است که در بیمارستان بستری شده‌اند.

۱-٤. بیان توزیع بوسیله نمودار

نمودار وسیله‌ای است تصویری به منظور نمایش توزیع داده‌های آماری، بنابراین باید طوری تهیه گردد که برای چشم مطبوع باشد و در تهیه آن ذوق و سلیقه کافی بکار رود. معمولا برای کشیدن نمودار از دستگاه مختصات استفاده می‌گردد. بدین ترتیب که در غالب موارد اندازه صفت مورد مطالعه روی محور طول و فراوانی آن روی محور عرض مشخص می‌گردد. باید محورها را طوری تقسیم بندی کرد که کمترین و بیشترین فراوانی و یا اندازه صفت مورد مطالعه در آنها بگنجد ضمناً در ارائه یک نمودار باید کلیه نکاتی را که در جدول شرح آن آمده است مورد توجه قرار داد.

نمودارهای متداول عبارتند از:

الف: نمودار نرده‌ای [1]

داده‌های اسمی و رتبه‌ای را می‌توان با نمودار نرده‌ای نشان داد. اشکال۱-۱ و ۱-۲ نمونه‌هایی از نمودار نرده‌ای است.

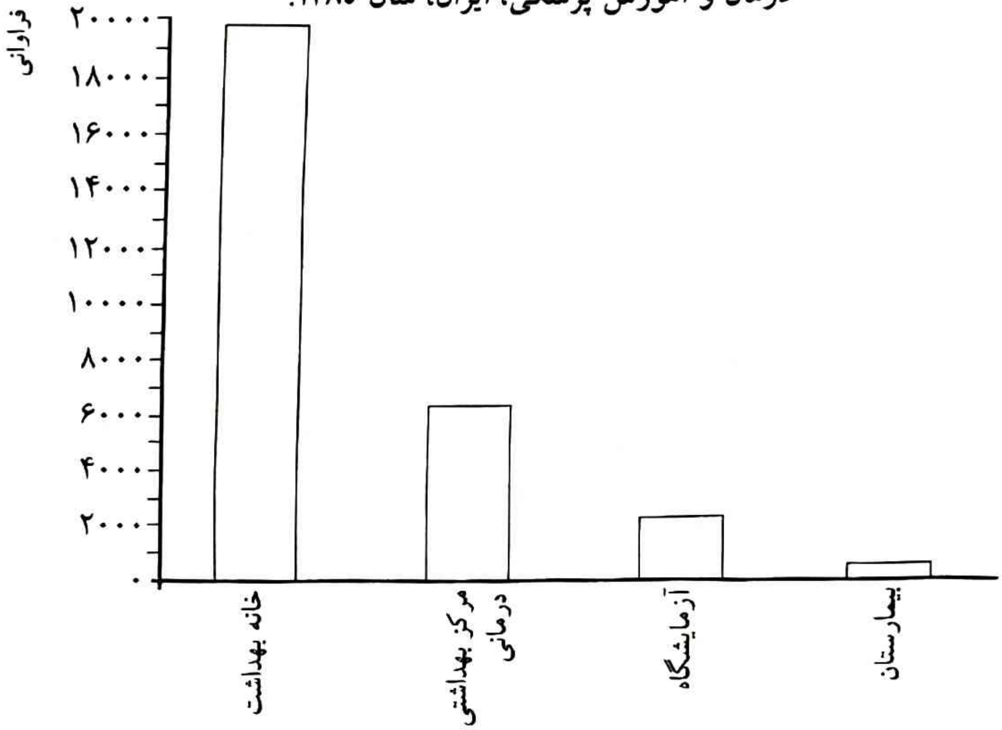
بدلیل خطای باصره لازم است قاعده نرده‌ها مساوی انتخاب شود و همچنین فواصل بین آنها نیز مساوی باشد.

ب: نمودار دایره‌ای [2]

موارد استعمال این نمودار معمولاً مانند نمودار نرده‌ای است و از آن برای نمایش داده‌های اسمی و رتبه‌ای استفاده می‌گردد. برای این منظور سطح دایره را به تناسب فراوانی گروه‌های مختلف تقسیم می‌کنیم. شکل ۱ -۳ معرف نمونه‌ای از نمودار دایره‌ای است.

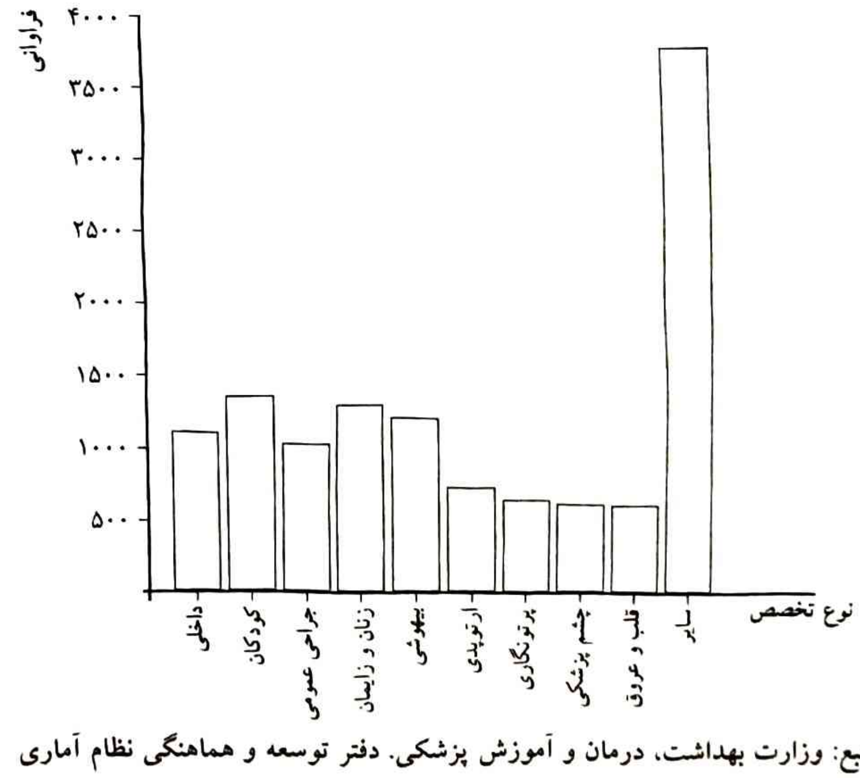
1. Bar diagram
2. Pie diagram

شکل ۱-۱. توزیع واحدهای بهداشتی درمانی وابسته به وزارت بهداشت، درمان و آموزش پزشکی، ایران، سال ۱۳۸۵.



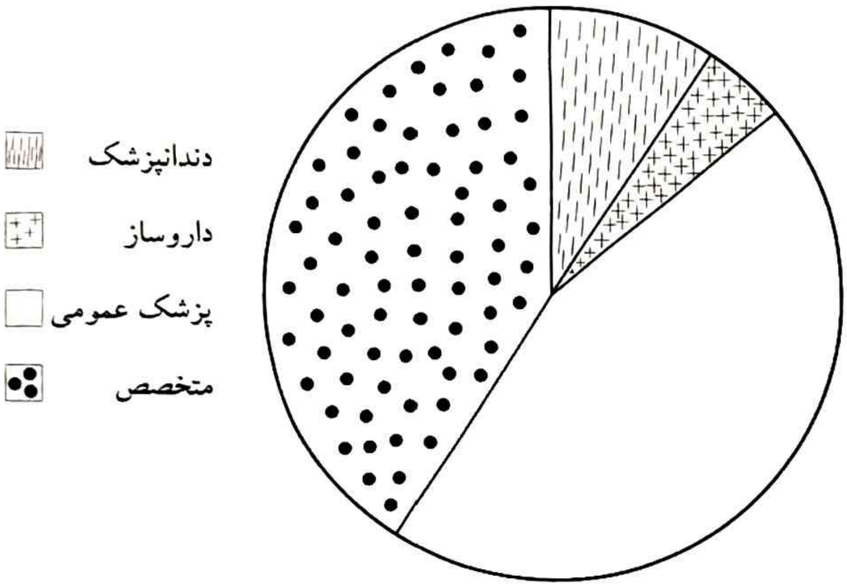
منبع: وزارت بهداشت، درمان و آموزش پزشکی. دفتر توسعه و هماهنگی نظام آماری

شکل ۱-۲ توزیع پزشکان متخصص شاغل در وزارت بهداشت، درمان و آموزش پزشکی، بر حسب نوع تخصص، ایران، سال ۱۳۸۵.



منبع: وزارت بهداشت، درمان و آموزش پزشکی. دفتر توسعه و هماهنگی نظام آماری

شکل۱-۳ توزیع ۳۰۰۴۳ نفر گروه پزشکی شاغل در وزارت بهداشت، درمان و آموزش پزشکی بر حسب رشته، ایران، سال ۱۳۸۵.



منبع: وزارت بهداشت، درمان و آموزش پزشکی. دفتر توسعه و هماهنگی نظام آماری.

ج. نمودار چندگوش[1]

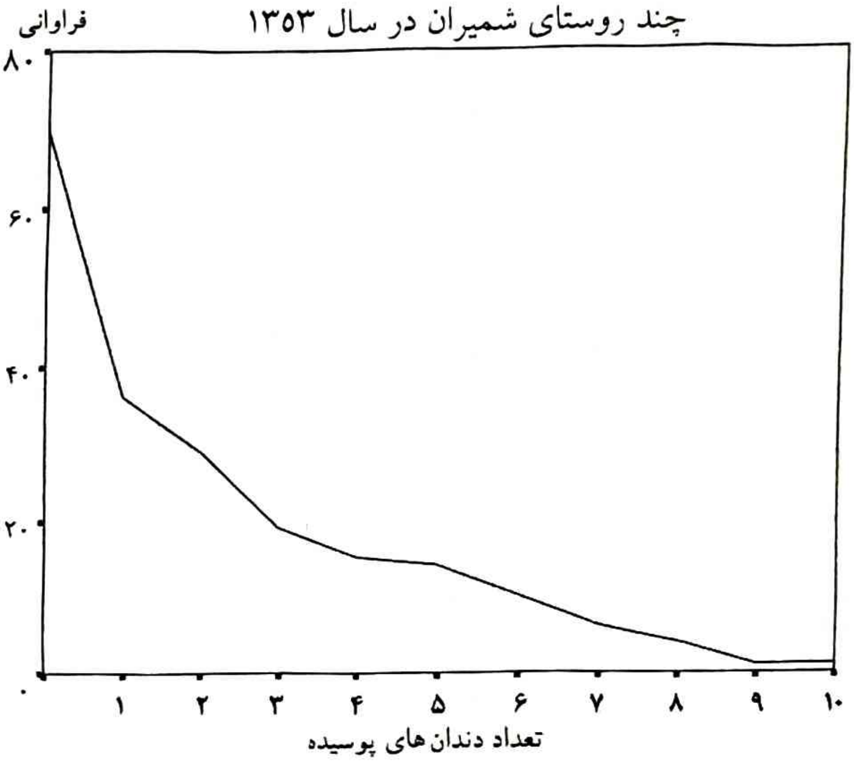
از این نمودار معمولاً برای نمایش داده‌های کمی گسسته، استفاده می‌گردد. بدین ترتیب که مقادیر صفت را روی محور طول‌ها و فراوانی متناظر با آن مقادیر را روی محور عرض‌ها مشخص می‌کنند. نموداری که از وصل کردن نقاط بدست آمده حاصل می‌گردد، چندگوش نامیده می‌شود. شکل ۱ -٤ نمونه‌ای از نمودار چندگوش است.

د. هیستوگرام[2]

از این نمودار معمولاً برای نمایش اطلاعات کمی پیوسته استفاده می‌گردد. نکته مهم اینکه در هیستوگرام سطح بالای هرگروه مساوی یا متناسب با فراوانی آن گروه است. بنابراین در مواردی که فاصله گروه‌ها مساوی باشد چون قاعده مستطیلها با هم برابر است، می‌توان از فراوانی ساده و یا فراوانی نسبی هر گروه به عنوان ارتفاع مستطیل استفاده کرد. اگر بخواهیم سطح زیر هیستوگرام برابر با یک شود، یعنی سطح بین هر دو نقطه، فراوانی نسبی آن فاصله را نشان دهد، بایستی محور y ها با ضریب مناسبی تعدیل گردد.

1. Polygon
2. Histogram

شکل ۱ -٤. توزیع فروانی تعداد دندان‌های پوسیده ۲۰۵ نفر دانش آموز ۱۲ ساله چند روستای شمیران در سال ۱۳۵۳



شکل ۱- ۵ هیستو گرام توزیع فراوانی ظرفیت حیاتی ۸۹ مرد ۵۰ - ٤۰ ساله را نشان می‌دهد.

چنانچه در هیستوگرام فواصل گروه‌ها مساوی نباشد، از آنجا که باید سطح بالای گروه متناسب با فروانی گروه باشد، لازم است با توجه به افزایش و یا کاهش قاعده مستطیل (فاصله گروه) ارتفاع آن را چنان تغییر داد که نسبت مذکور مراعات شود.

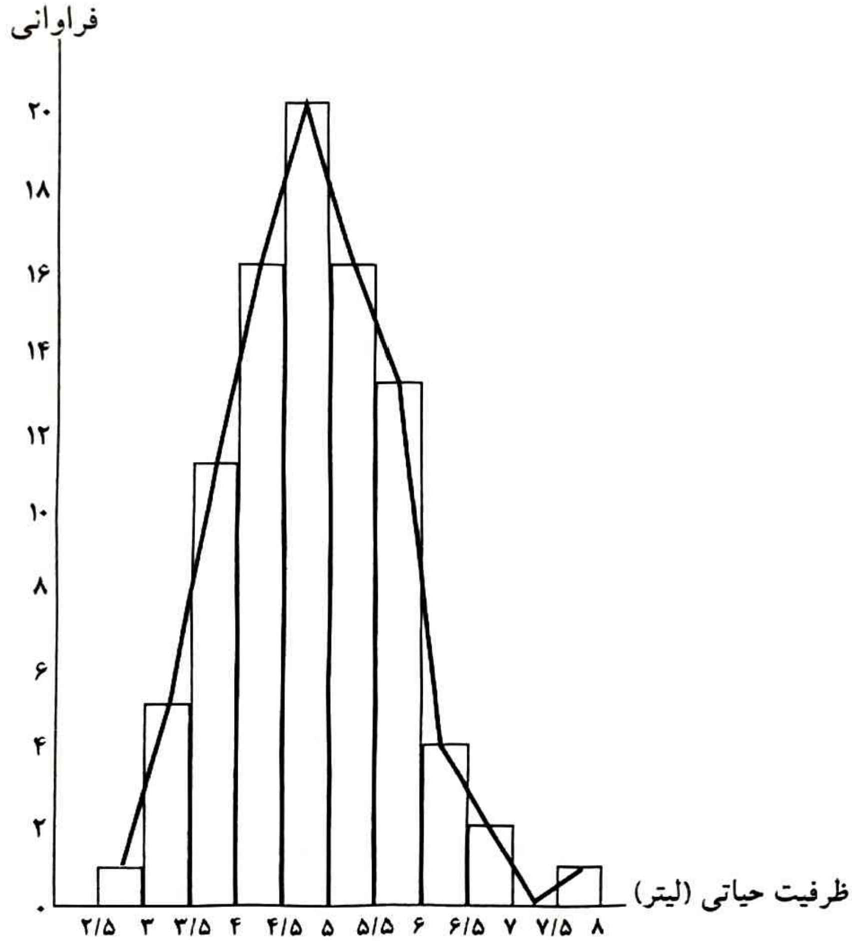
مثلا برای رسم هیستوگرام اطلاعات داده شده در جدول ۱-۳ چنانچه ملاحظه می‌گردد فاصله همه گروه‌ها بجز دو گروه آخر یکسال است و فاصله این دو گروه ۵ برابر فاصله گروه‌های دیگر است. بنابراین قاعده مستطیل‌های دو گروه آخر ۵ برابر گروه‌های قبل خواهد بود برای جبران آن لازم است ارتفاع مستطیل‌ها را برای این دو گروه به ترتیب ۲/۸ = ۵÷۱٤ و ۰/٦ = ۵÷۳ انتخاب نمود. به عبارت دیگر فروانی را برای واحد فاصله[1] حساب می‌کنیم، که در مثال فوق تعداد مرگ برای هر سال می‌باشد تا در تمام گروه‌ها تعداد مرگ برای یکسال به حساب آمده باشد. شکل ۱ -٦ معرف هیستوگرام اطلاعات جدول ۱-۳ است.

چنانچه در هیستوگرام وسط ستونها را بهم وصل کنیم یک چندگوش حاصل می‌شود. این عمل نمایش چند هیستوگرام را روی یک دستگاه مختصات آسان می‌سازد، زیرا می‌توان ستونها را پاک کرد و از چندگوشها استفاده نمود.

---

۱. فراوانی چگالی

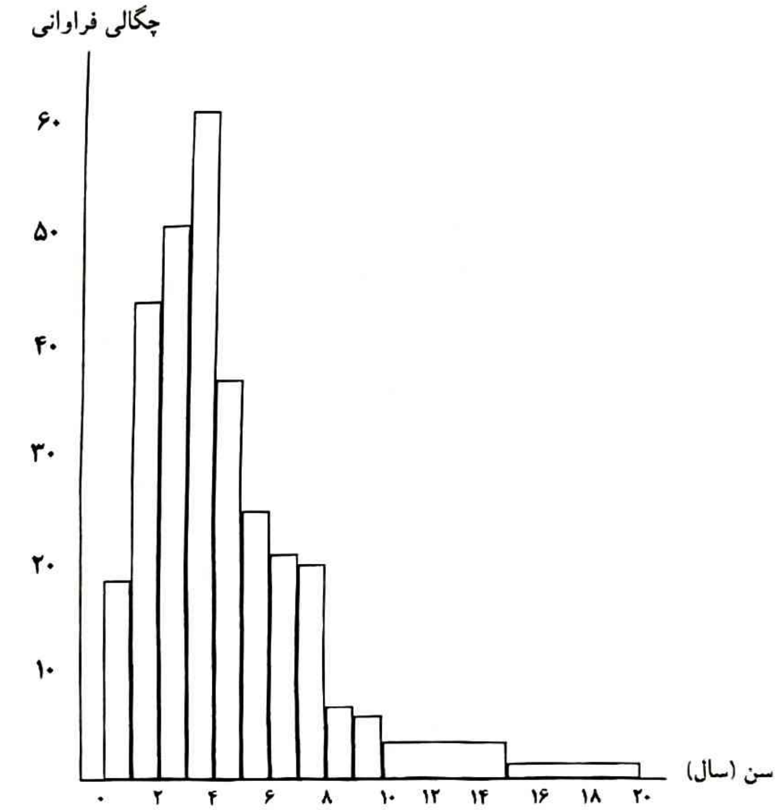
شکل ۱-۵ هیستوگرام توزیع ۸۹ مرد ۵۰-۴۰ساله بر حسب ظرفیت حیاتی، منطقه ... در سال ...



جدول ۱-۳. توزیع ۳۰۲ مورد مرگ از مخملک برحسب سن منطقه .... در سال .....

سن بر حسب سال	تعداد مرگ
۰	۱۸
۱	٤۳
۲	۵۰
۳	٦۰
٤	۳٦
۵	۲٤
٦	۲۲
۷	۲۱
۸	٦
۹	۵
۱۰-۱٤	۱٤
۱۵-۱۹	۳
جمع	۳۰۲

شکل ۱-٦ هیستوگرام توزیع ۳۰۲ مورد مرگ از مخملک بر حسب طول عمر منطقه ... در سال ...



در اطلاعاتی که تعداد مشاهدات محدود باشد، می‌توان اطلاعات را به صورت ساقه و برگ[1] نمایش داد. در این روش یک یا چند رقم سمت چپ اندازه صفت به عنوان ساقه در نظر گرفته می‌شود و به صورت صعودی روی محور افقی یا عمودی مرتب می‌شود. بقیه ارقام که در واقع برگ ساقه می‌باشد در بالا یا در کنار ساقه به ترتیب صعودی نوشته خواهد شد. این شکل حالتی از هیستوگرام است که در آن اندازه یک یک افراد مشخص می‌باشد.

مثال: اطلاعات زیر نمرات زبان ۳۰ دانشجو را بر مبنای ۱۰۰ نشان می دهد.

۹۰	۹٤	۸۷	۷۱	۷۹	٦۵	۹٦	۸۰	۵۲	۷۵
۹۲	۵۰	٦۸	۷۹	۸٦	۷٦	٦۲	۸۱	۷۳	٦۹
۹۸	۵۷	۹۲	۷۲	۸۷	۷۲	٦٤	۷۸	۸٤	۸۳

نمودار ساقه و برگ برای این داده‌ها به صورت زیر خواهد بود:

۵	۰ ۲ ۷
٦	۲ ٤ ۵ ۸ ۹
۷	۱ ۲ ۲ ۳ ۵ ٦ ۸ ۹ ۹
۸	۰ ۱ ۳ ٤ ٦ ۷ ۷
۹	۰ ۲ ۲ ٤ ٦ ۸

1. Stem and Leaf

هـ . نمودار توزیع تجمعی

در این نمودار مقادیر صفت روی محور طول‌ها و فراوانیهای تجمعی به صورت ساده یا نسبی روی محور عرض‌ها در نظر گرفته می‌شود سپس نقاط متناظر مقادیر صفت و فراوانیهای تجمعی را مشخص کرده و از وصل کردن این نقاط به هم (در صفات پیوسته به صورت خطی یا تقریب منحنی و در صفات ناپیوسته به صورت پلکانی) نمودار تجمعی حاصل می‌گردد. براساس این نمودار می‌توان صدکهای مختلف مثل صدک بیست و پنجم (چارک اول) صدک پنجاهم (میانه) صدک هفتاد و پنجم (چارک سوم) را محاسبه کرد.

شکل ۱-۷ نمودار توزیع تجمعی برای داده‌های جدول ۱-۱ را نشان می‌دهد. براساس این نمودار، صدک بیست و پنجم، میانه (صدک پنجاهم) و صدک هفتاد و پنجم به ترتیب برابر ۴/۲ و ۴/۸ و ۵/۴ می‌باشد.

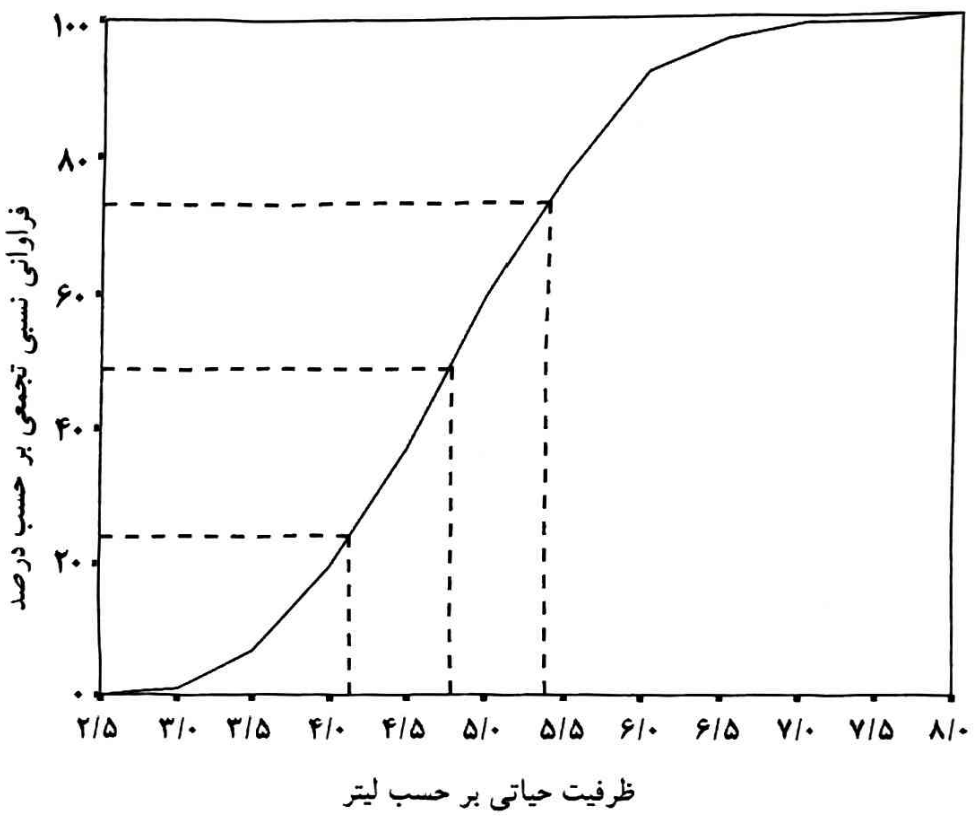
شکل ۱-۸ نمودار توزیع تجمعی را برای داده‌های جدول ۱-۴ نمایش می‌دهد براساس این نمودار صدک بیست و پنجم، میانه (صدک پنجاهم) و صدک هفتاد و پنجم به ترتیب برابر ۰ و ۱ و ۳/۵ می‌باشد.

جدول ۱-۴ . تعداد دندانهای پوسیده ۲۰۵ نفر دانش آموز ۱۲ ساله چندروستای شمیران در سال ۱۳۵۳

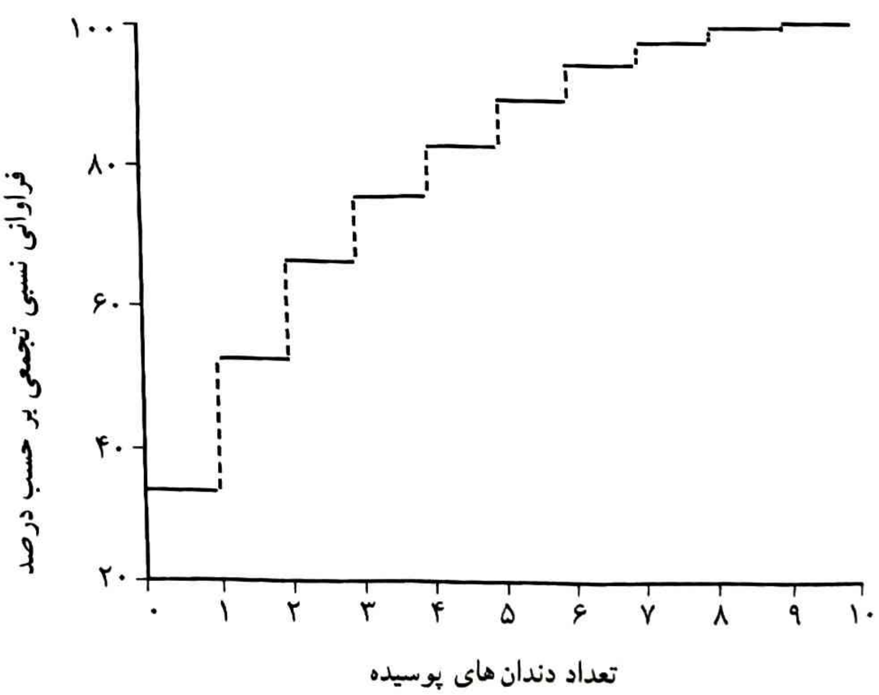
تعداد دندانهای پوسیده	فراوانی مطلق	فراوانی تجمعی
۰	۷۰	۷۰
۱	۳۶	۱۰۶
۲	۲۹	۱۳۵
۳	۱۹	۱۵٤
٤	۱۵	۱٦۹
۵	۱٤	۱۸۳
٦	۱۰	۱۹۳
۷	٦	۱۹۹
۸	٤	۲۰۳
۹	۱	۲۰٤
۱۰	۱	۲۰۵
جمع	۲۰۵	

منبع : مطالعه پیمایشی بهداشت دهان و دندان

شکل ۱-۷ . نمودار توزیع تجمعی برای داده‌های جدول ۱ - ۱



شکل ۱-۸ نمودار توزیع تجمعی برای داده های جدول ۱-٤



می‌توان صدک‌ها را براساس فرمول کلی زیر نیز محاسبه کرد:

$$\text{جایگاه صدک k ام} = \frac{k(n+۱)}{۱۰۰}$$

به عبارت دیگر صدک k ام مقدار صفت برای فردی است که در رتبه $\frac{k(n+۱)}{۱۰۰}$ ام قرار دارد. برای مثال، براساس فرمول فوق جایگاه صدک هفتاد و پنجم برابر $\frac{۷۵\times(n+۱)}{۱۰۰}$ می‌باشد که برای داده‌های جدول ۱ – ٤ مساوی $\frac{۷۵\times(۲۰۶)}{۱۰۰}=۱۵٤/۵$ می‌باشد یعنی جایگاه صدک ۷۵ ام بین فرد ۱۵٤ و ۱۵۵ می‌باشد. مقدار صفت برای فرد ۱۵٤ ام برابر ۳ و برای فرد ۱۵۵ ام برابر ٤ می‌باشد. لذا صدک هفتاد و پنجم برابر ۳/۵ خواهد بود.

تمرین

۱. نتیجه سنجش مشاهدات زیر در قالب کدام یک از انواع اسمی، رتبه‌ای، فاصله‌ای و نسبتی قرار می‌گیرد.

الف. طول قد نوزادی ٤۵ سانتیمتر است.

ب. تعداد دانشجویان حاضر در کلاس ٤۰ نفر است.

ج. نمره دانشجوئی در درس تشریح ۷۵ است.

د. در پرتاب ده سکه ٦ بار رویه شیر ظاهر شده است.

هـ. رطوبت نسبی هوا ۵۵ درصد است.

و. تیم کشتی ایران در جهان سوم شده است.

ز. شخصی ۷۰ متر را در ۵۰ ثانیه شنا می‌کند.

ح. درآمد ماهیانه شخصی ۳۰/۰۰۰ ریال است.

ط. فشار خون ماکزیمم شخص ۱۲۰ میلی متر جیوه است.

ی. گروه خونی شخصی A است.

ک. نوزاد معینی پسر است.

۲. اگر پتاسیم خون ۱۰۵ نفر ۲/٤٦ تا ٤/۳۲ میلی اکی والانت در لیتر باشد، گروه‌بندی مناسب با فواصل مساوی برای این اطلاعات تهیه نمایید.

۳. نتایج اندازه‌گیری مقدار کرآتی‌نین برای ۸٤ مرد برحسب میلی گرم درصد سانتی‌متر مکعب خون در زیر داده شده است، این اطلاعات را به فواصل مناسب گروه بندی نموده و نمودار مربوط به آن را رسم کنید.

١/٤٠	١/٦٥	١/٥٤	١/٥٨	١/٦٥	١/٥١
١/٨٣	١/٥٦	١/٣٨	١/٨١	١/٠٨	١/٦١
١/٦٨	١/٤٧	١/٦٨	١/٢٢	١/٢٢	١/٦٩
١/٦٤	١/٥٠	١/٨٣	١/٣٢	١/٨٠	١/٤٩
١/٣٤	١/٧٣	١/٥٤	١/٥٣	١/٦٠	١/٦٧
١/٤٩	١/٥٩	١/٦٠	١/٥٦	١/٤٦	٢/١٨
١/١٥	١/٦٩	١/٤٣	٢/٠٠	١/٧٢	١/٤٦
١/٤٠	١/٣٧	١/٥٨	١/٩٦	١/٤٧	١/٨٩
١/٣١	١/٥١	١/٦٦	٢/٣٤	١/٦٢	١/٧٦
١/٤٤	١/٧١	١/٦٦	١/٤٣	١/٥٨	٢/٢٩
١/٥٢	١/٤٧	١/٢٦	١/٨٦	١/٣٨	١/٦٦
١/٨٣	١/٥٧	١/٧٥	١/٩٠	١/٣٣	١/٥٧
١/٨٦	١/٤٧	١/٥٩	١/٥٢	١/٦٦	١/٥٢
٢/٠٢	١/٨٦	١/٤٠	١/٨٠	١/٥٥	١/٧٣

٤. اطلاعات زیر مربوط به توزیع مرگ بچه‌های زیر یکسال در ایالات متحده آمریکا در سال ١٩٥٤ است. نمودار این اطلاعات را به صورت هیستوگرام رسم کنید.

سن مرگ	تعداد
کمتر از یکساعت	٧٥٩٤
٢٣ – ١ ساعت	٣١٠٧٤
١ روز	١١٦١٨
٦-٢ روز	١٧٠٦٥
٢٧ – ٧ روز	٩٣٧١
٥٩-٢٨ روز	٩٥٥٤
٢ ماه	٤٩٣٧
٣ ماه	٤٠٠٢
٤ ماه	٣١٨٢
٥ ماه	٢٥٩٢
٦ ماه	٢٢٠٠
٧ ماه	١٧٥٣
٨ ماه	١٥٠١
٩ ماه	١٢٦٢
١٠ ماه	١٠٤٧
١١ ماه	١٠٣٧

(فراوانیها را به صورت درصد در نظر بگیرید و برای سهولت ترسیم ۵ گروه اول را یک گروه در نظر بگیرید)

۵. اگر اطلاعات زیر مربوط به بیمارانی باشد که در یک سرویس مبارزه با سرطان بدلیل سرطان گردن رحم تحت درمان قرار گرفته‌اند، نمودار این بیماران را برحسب سن رسم کنید.

سن مرگ	تعداد بیمار
۲۲ – ۲۹	۱۸
۳۰ – ۳۴	٤۵
۳۵ – ۳۹	۷۹
٤۰ – ۵٤	۲۲۵
۵۵ – ۵۹	٦۳
٦۰ – ٦۹	٤۵
۷۰ – ۹۰	۱۳
جمع	٤۸۸

٦. جدول زیر مربوط به کلسترول خون ۱۵۰۲ مرد مبتلا به بیماری قلبی بر حسب میلی‌گرم در ۱۰۰ سانتیمتر مکعب است.

الف. هیستوگرام این توزیع را رسم کنید.

ب. فراوانیهای تجمعی این جدول را محاسبه کنید و آنگاه براساس این فراوانیها نمودار مربوط را رسم نمایید. (فراوانیها را بصورت درصد در نظر بگیرید)

ج. از روی پلی‌گون حاصل مقداری که به ترتیب کلسترول خون ۱۰ درصد ۵۰ درصد، ۷۵ درصد افراد مساوی یا کمتر از آن است محاسبه کنید.

کلسترول	فروانی
۱۲۰ – ۱۴۹	۸
۱۵۰ – ۱۷۹	۴۹
۱۸۰ – ۲۰۹	۸۲
۲۱۰ – ۲۳۹	۱۷۶
۲۴۰ – ۲۶۹	۲۴۲
۲۷۰ – ۲۹۹	۲۷۷
۳۰۰ – ۳۲۹	۲۵۳
۳۳۰ – ۳۵۹	۲۰۱
۳۶۰ – ۳۸۹	۱۱۱
۳۹۰ – ۴۱۹	۴۹
۴۲۰ – ۴۴۹	۲۹
۴۵۰ – ۴۷۹	۲۵
جمع	۱۵۰۲

۷. اگر جدول زیر مربوط به توزیع دفعات مراجعه مادران به یک مرکز بهداشتی مادر و کودک به منظور مراقبت نوزاد باشد، پلی گون تجمعی آن را رسم کنید و از روی آن قضاوت کنید که ۷۵ درصد مادران حداکثر چندبار به مرکز بهداشتی فوق مراجعه نموده‌اند. به همین سوال بار دیگر از طریق محاسبه پاسخ دهید.

بارهای مراجعه	تعداد
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۷
۴	۲۸
۵	۵۶
۶	۵۳
۷	۲۹
۸	۲۹
۹	۳۷
جمع	۲۴۶

۸. اگر اطلاعات زیر مربوط به دلیل مراجعه ۲۲۰ بیمار به یک بیمارستان باشد، نمودار مناسبی برای نشان دادن این دلایل رسم کنید.

دلیل	تعداد
انتخاب از طرف خود بیمار	۷۳
نداشتن پزشک خانوادگی	٦۱
در دسترس نبودن پزشک خانوادگی	٤٥
بسته بودن بیمارستان مورد نظر	۲۳
ارزان بودن مخارج	٤
سایر دلایل	۱٤
جمع	۲۲۰

۹. اطلاعات زیر مربوط به سن و جنس ۹۱ مورد مرگ ارامنه تهران در سال ۱۳۳٦ می‌باشد ($\frac{1}{6}$ از کل مرگ ها)

سن	جنس	سن	جنس
۷۸	مرد	٤۹	مرد
٥۸	زن	۷۹	زن
٤۸	مرد	۸۰	زن
۷۷	مرد	٦٥	زن
۸۲	مرد	۲٤	زن
۲	زن	۷٥	مرد
٦٦	مرد	۷۰	زن
۷٤	زن	٦۷	مرد
۷٥	زن	٤۳	مرد
۷٦	مرد	۸۷	زن
۸۰	زن	۷٥	مرد
۰	مرد	٦۸	مرد
٥٦	مرد	۰	زن
٦۳	زن	۷۹	زن
۲	زن	۱۰٥	زن
۱۷	مرد	٤۸	مرد
٥۸	مرد	۲۱	زن
٦۷	مرد	۷۸	زن
۳۳	مرد	۰	زن

سن	جنس
٠	زن
٢	زن
٧٠	زن
٥٦	مرد
٢	زن
٥٨	زن
١٦	زن
٥٩	زن
٤٦	مرد
٨٨	زن
٠	زن
٤	زن
٦٥	مرد
٧٧	زن
٧٠	مرد
٦٦	مرد
٤٤	مرد
٩٠	مرد
٥٧	مرد
٦٣	زن
٦٤	زن
٠	مرد
٢	زن
٥٥	زن
٤٦	زن
٦٦	زن
٧٩	زن

سن	جنس
٨٠	مرد
٧٦	مرد
٠	زن
٧٩	زن
٤	زن
١	زن
٦٤	مرد
٠	زن
٢٧	زن
٢٦	زن
٠	مرد
٧٦	مرد
٧٦	زن
٦٥	زن
٧٤	زن
٨٥	زن
٧٣	زن
٦٥	مرد
٧٦	زن
٦٥	زن
٥٣	زن
٨٣	زن
٣١	زن
٦٢	مرد
٣٠	زن
٥٣	زن

توزیع فراوانی این اطلاعات را بصورت جداول برحسب سن (بفواصل ٥ سال) و جنس نشان دهید.

۱۰. اطلاعات زیر مربوط به افرادی است که در سال ٤٦ – ١٣٤٥ در شهر تهران از بیماری مننژیت فوت کرده‌اند:

سن	جنس
۰	مرد
۲	مرد
۳	مرد
۷	مرد
۹	مرد
	مرد
۳	مرد
۱۰	مرد
۱	زن
۱۳	مرد
۲	زن
۷	زن
۳	مرد
٦۷	مرد
۰	زن
۰	زن
٦	زن
۰	زن
٦	زن
۱۰	زن
۳	مرد
۱۲	مرد
٤	مرد
٤	زن
۱٦	زن
۲	زن
۹	زن

سن	جنس
٤	مرد
۱۰	زن
٦	مرد
۰	مرد
۱۲	زن
۲	زن
۱۳	مرد
۰	زن
۹	زن
۱۰	زن
۷	زن
٦	مرد
۳	مرد
۷	زن
٥۳	زن
۳	مرد
۱۸	مرد
۰	مرد
۱۹	مرد
۲٥	مرد
٥	مرد
۱	مرد
۳	زن
۳	مرد
٥	مرد
٦	مرد
۸	مرد

سن	جنس	سن	جنس
۱۰	زن	۳	مرد
۲۸	مرد	۳	مرد
۰	مرد	۸	مرد
۳	مرد	۲۶	زن
۲٤	مرد	۰	زن
۳۹	زن	۵	مرد
۳	مرد	۷	زن
۱۵	زن	۱۸	مرد
۳	مرد	۸	زن
۳۷	زن	۱۳	مرد
۲	زن	٤	زن
۷	زن	۳	مرد
۱۲	مرد	۰	زن
۱۱	مرد	۱	زن
۱	مرد	٤٤	مرد
٤	زن	۷	زن
۹	زن	٤۷	مرد
۳	مرد	۵	مرد

دو نمودار مناسب که گویای توزیع تعداد مرگ برحسب سن (بفواصل ۵ سال) باشد در یک دستگاه مختصات برای مردان و زنان رسم کنید.

۱۱. اطلاعات زیر میزان مرگ و میر کودکان و مادران باردار را در ایالات متحده برحسب هزار تولد زنده نشان می‌دهد. نمودار هر دو توزیع را روی یک صفحه مختصات رسم کنید.

سال	کودکان	مادران
۱۹٤۰	٤۷/۰	۳/۸
۱۹٤۱	٤٥/۳	۳/۲
۱۹٤۲	٤۰/٤	۲/٦
۱۹٤۳	٤۰/٤	۲/٥
۱۹٤٤	۳۹/۸	۲/۳
۱۹٤٥	۳۸/۳	۲/۱
۱۹٤٦	۳۳/۸	۱/٦
۱۹٤۷	۳۲/۲	۱/٤
۱۹٤۸	۳۲/۰	۱/۲
۱۹٤۹	۳۱/۳	۰/۹
۱۹٥۰	۲۹/۲	۰/۸
۱۹٥۱	۲۸/٤	۰/۸
۱۹٥۲	۲۸/٤	۰/۷
۱۹٥۳	۲۷/۸	۰/٦
۱۹٥٤	۲٦/٦	۰/٥

۱۲. بفرض آنکه اطلاعات زیر گویای توزیع جمعیتی برحسب سن باشد، نمودار این توزیـع را رسم کنید.

گروه‌های سنی	فراوانی
۰ – ۹	۷٥
۱۰ – ۱٤	۳۲
۱٥ – ۱۹	۲۷
۲۰ – ۲٤	۲۱
۲٥ – ۲۹	۱۹
۳۰ – ۳٤	۱۷
۳٥ – ٤٤	۲٦
٤٥ – ٥٤	۱٦
٥٥ – ٦٤	۱۲
٦٥ – ۷۹	۹
جمع	۲٥٤

برپایه توزیع تجمعی این جدول، مقدار میانه سن را محاسبه کنید.

۱۳. اگر اطلاعات زیر مربوط به نمره درس ۲۳ دانشجو برمبنای ۱۰۰ باشد :

الف. برای اطلاعات زیر نمودار ساقه و برگ رسم نمایید.

۵۹	۹۱	۹۵	۸۶	۷۷	۷۸	۷۱	٦٤	۸۲	۹۸	٦۵	۵٦
	۷۳	۹۹	۹۲	۹۱	۸۵	۸۲	۷٦	۹۲	۸۰	۷۰	٦۹

ب. براساس این نمودار بیشترین دانشجوها در کدام فاصله قرار دارند.

۱٤. توزیع تجمعی برای یک مقدار از صفت، نسبت افرادی است که:

الف) بیشتر از این مقدار را دارا می‌باشند.

ب) در فاصله یک واحد از آن قرار دارند.

ج) درست همین مقدار را دارا می‌باشند.

د) مساوی یاکمتر از این مقدار را دارا می‌باشند.

۱۵. متغیر بعد خانوار کدامیک ازانواع متغیرهای زیر است؟

الف) اسمی ب) رتبه‌ای

ج) فاصله‌ای د) نسبتی

۱٦. درصد بیماران ارجاعی، کدامیک از انواع صفات زیر است؟

الف) نسبتی ب) اسمی

ج) رتبه‌ای د) فاصله‌ای

۱۷. سطح زیر هیستوگرام در یک فاصله معین معرف کدام گزینه زیر است؟

الف) مقدار صفت در این فاصله ب) مقدار صفت در خارج از این فاصله

ج) فراوانی صفت در این فاصله د) فراوانی صفت در خارج از این فاصله

فصل دوم
توصیف عددی نتیجه مشاهدات

۲-۱. مقدمه

در فصل اول، طبقه‌بندی نتیجه مشاهدات و بیان آن بوسیله جدول و نمودار، مورد بحث قرار گرفت. ولی در پاره‌ای موارد استفاده از جدول و نمودار برای نمایش اطلاعات، عملی و یا مطلوب نیست و برای بیان توزیع از پاره‌ای اندازه‌های عددی استفاده می‌گردد. این فصل به بیان محاسبه و کاربرد متداولترین این اندازه‌ها اختصاص دارد و در فصول بعد نحوه استفاده ازاین اندازه‌ها در تجزیه و تحلیل مورد بحث قرار می‌گیرد.

۲-۲. شاخص‌های مرکزی[1] (میانگین[2]، میانه[3]، نما[4])

شاخص‌های مرکزی اندازه‌هایی هستند که جایگاه مرکز یک توزیع را بیان می‌کنند. مهمترین این مشخص کننده‌ها میانگین حسابی، میانه و نما است که به ترتیب درباره آنها بحث می‌شود.

میانگین حسابی که در این کتاب به نام مطلق میانگین نامیده می‌شود از تقسیم مجموع داده‌ها بر تعداد این داده‌ها حاصل و با حرف یونانی μ مشخص می‌گردد. چنانچه نتیجه مشاهدات را بصورت یک هیستوگرام در نظر بگیریم، جایگاه میانگین روی محور طول، معرف مرکز ثقل توزیع خواهد بود. به عبارت دیگر اگر صفحه‌ای فلزی به شکل هیستوگرام داشته باشیم و این صفحه را در نقطه میانگین روی لبه چاقویی قرار دهیم دارای حالت تعادل خواهد بود. اگر N معرف تعداد مشاهدات و X_1، X_2، X_3،...،X_i،...،X_N بـه ترتیب معرف مقدار صفت برای مشاهده اول، دوم، سوم،

1. Measures of Central Tendency
2. Mean
3. Median
4. Mode

i ام، ... و N ام باشند، طبق تعریف برای محاسبه میانگین خواهیم داشت:

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_i + \ldots + X_N}{N} = \frac{\sum X_i}{N} \qquad (۲-۱)$$

در این فرمول علامت Σ (سیگما) نمایشگر جمع است یعنی باید مقادیر مختلف X_i را که از X_1 تا X_N تغییر می‌کند جمع و بر تعداد مقادیر که همان N است تقسیم کرد. برای سهولت کار می‌توان فرمول فوق را بصورت ساده

$$\mu = \frac{\sum X}{N}$$

نیز نوشت. چنانچه در مطالعه‌ای نتیجه مشاهدات بصورت گروه‌بندی شده باشد و مثلاً برای صفت کمی ناپیوسته X توزیعی بصورت زیر ارائه گردد:

$$\begin{array}{c} X_i \\ N_i \end{array} \left(\begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & \ldots X_K \\ N_1 & N_2 & N_3 & \ldots N_K \end{array} \right)$$

که در آن X_i معرف مقدار صفت برای گروه i ام و N_i معرف فراوانی مربوط به این گروه می‌باشد. برای محاسبه میانگین صفت از رابطه (۲ – ۲) استفاده می‌شود:

$$\mu = \frac{N_1 X_1 + N_2 X_2 + N_3 X_3 + \ldots + N_K X_K}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_k} = \frac{\sum NiXi}{N} \qquad (۲-۲)$$

که در آن طبق رابطه زیر N معرف تعداد کل مشاهدات است:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_k = \sum N_i$$

جدول۲ – ۱ مثالی است از محاسبه میانگین برای اطلاعات جدول ۱ – ٤

جدول۲ – ۱.

$N_i X_i$	N_i	X_i
۰	۷۰	۰
۳٦	۳٦	۱
۵۸	۲۹	۲
۵۷	۱۹	۳
٦۰	۱۵	٤
۷	۱٤	۵
٦۰	۱۰	٦
٤۲	٦	۷
۳۲	٤	۸
۹	۱	۹
۱۰	۱	۱۰
٤۳٤	۲۰۵	جمع

$$\mu = \frac{\sum N_i X_i}{N} = \frac{۴۳۴}{۲۰۵} = ۲/۱۲$$

در مطالعاتی که نتیجه مشاهدات بصورت کمیت پیوسته است، چون معمولا جدول توزیع فراوانی بصورت گروه‌بندی شده ارائه می‌شود، محاسبه میانگین تنها به طور تقریب امکان‌پذیر می‌گردد. روش محاسبه مانند مثال فوق است با این تفاوت که مقدار متوسط هر گروه را در فراوانیهای متناظر آن گروه ضرب می‌کنیم و در واقع فرض می‌کنیم که اندازه همه افراد یک گروه برابر اندازه متوسط آن گروه باشد. برای سهولت کار متوسط گروه را نیز با X_i نشان می‌دهیم.

اطلاعات داده شده در جدول ۲ – ۲ مربوط به فشار خون سیستولیک ۶۰۴ نفر مرد ۳۵ سال به بالای چند روستای شهرستان رودسر در سال ۱۳۵۰ است که میانگین آن براساس فرمول (۲-۲) محاسبه گردیده است.

جدول ۲ – ۲

کرانه‌های گروه	(N_i)	(X_i)	$(N_i X_i)$
۹۰ – ۱۰۰	۱۵	۹۵	۱۴۲۵
۱۰۰ – ۱۱۰	۵۷	۱۰۵	۵۹۸۵
۱۱۰ – ۱۲۰	۸۲	۱۱۵	۹۴۳۰
۱۲۰ – ۱۳۰	۱۵۵	۱۲۵	۱۹۳۷۵
۱۳۰ – ۱۴۰	۱۰۵	۱۳۵	۱۴۱۷۵
۱۴۰ – ۱۵۰	۸۶	۱۴۵	۱۲۴۷۰
۱۵۰ – ۱۶۰	۳۳	۱۵۵	۵۱۱۵
۱۶۰ – ۱۷۰	۲۹	۱۶۵	۴۷۸۵
۱۷۰ – ۱۸۰	۲۱	۱۷۵	۳۶۷۵
۱۸۰ – ۱۹۰	۵	۱۸۵	۹۲۵
۱۹۰ – ۲۰۰	۱۶	۱۹۵	۳۱۲۰
جمع	۶۰۴		۸۰۴۸۰

$$\mu = \frac{\sum N_i X_i}{N} = \frac{۸۰۴۸۰}{۶۰۴} = ۱۳۳/۲۵$$

شاخص مرکزی دیگری که مورد بحث این کتاب است میانه می‌باشد. میانه یک توزیع عبارت از مقداری است که برای نصف افراد مقدار صفت از آن بزرگتر و برای نصف دیگر از آن کوچکتر است. به عبارت دیگر اگر روی هیستوگرام توزیع از نقطه میانه روی محور طول خطی موازی محور عرض رسم کنیم، سطح زیر هیستوگرام بدو قسمت کاملا مساوی تقسیم می‌گردد. برای محاسبه میانه ابتدا اعداد را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می‌کنیم و آنگاه اندازه صفت را برای فرد وسط $\left(\frac{N+۱}{۲}\right)$ به عنوان میانه انتخاب می‌کنیم. مثلاً برای محاسبه میانه تعداد اولاد ۹ خانوار که دارای ۲، ۷، ۳، ۸، ٦، ۵، ۰، ۱ و ۲ اولاد هستند ابتدا این خانوارها را برحسب تعداد اولاد بصورت صعودی مرتب می‌کنیم که خواهیم داشت: ۰، ۱، ۲، ۲، ۳، ۵، ٦، ۷، ۸ آنگاه براساس تعریف، مقدار صفت برای خانواده پنجم $\left(\frac{۹+۱}{۲}=۵\right)$ که برابر ۳ است معرف میانه خواهد بود. در صورتیکه تعداد اعداد زوج باشد مناسب است که متوسط دو عدد وسط را به عنوان میانه انتخاب کنیم. مثلا میانه ٦ عدد ۲، ۷، ۱۳، ۲۱، ۳۵، ۳۹ عدد $\left(\frac{۲۱+۱۳}{۲}=۱۷\right)$ می‌شود.

چنانچه نتیجه مشاهدات بصورت گروه‌بندی شده و یا به عبارت دیگر بصورت جدول فراوانی باشد، برای محاسبه میانه ابتدا فراوانیهای تجمعی را محاسبه می‌کنیم. (F_i معرف فراوانی تجمعی X_i) تا بتوان بخوبی موقعیت و ردیف اندازه صفات را مشخص نمود و آنگاه باتوجه به ستون فراوانیهای تجمعی اندازه‌ای را که در ردیف $\frac{N+۱}{۲}$ قراردارد به عنوان میانه انتخاب می‌کنیم. جدول ۲-۳ چگونگی محاسبه میانه را برای داده‌های جدول ۲ – ۱ نشان می‌دهد.

جدول ۲-۳

F_i	N_i	X_i
۷۰	۷۰	۰
۱۰٦	۳٦	۱
۱۳۵	۲۹	۲
۱۵٤	۱۹	۳
۱٦۹	۱۵	٤
۱۸۳	۱٤	۵
۱۹۳	۱۰	٦
۱۹۹	٦	۷
۲۰۳	٤	۸
۲۰٤	۱	۹
۲۰۵	۱	۱۰
-	۲۰۵	جمع

$$\frac{N+۱}{۲}=\frac{۲۰۵+۱}{۲}=۱۰۳$$
$$\text{Med}=۱$$

در این جدول چون داشتن ۱ دندان پوسیده مربوط به ردیف ۷۱ تا ۱۰۶ است بنابراین ردیف ۱۰۳ نیز دارای ۱ دندان پوسیده خواهد شد و در و اقع میانه این جدول عدد ۱ است.

آخرین مشخص کننده‌ای که به عنوان شاخص مرکزی موردبحث قرار می‌گیرد نما است و آن عبارت است از داده یا داده‌هایی که بیشترین فراوانی را دارند بنابراین در جدول ۲ -۱ نما برابر صفر دندان پوسیده و درجدول ۲ – ۲ نما در فاصله ۱۳۰ – ۱۲۰ قرار دارد که می‌توانیم تقریباً متوسط این گروه یعنی عدد ۱۲۵ را به عنوان نما انتخاب کنیم. البته در حالت اخیر می‌توان مقدار نما را با روشی دقیق‌تر نیز محاسبه نمود که از ذکر آن صرف‌نظر می‌شود. در توزیع متقارن شکل ۲ -۱ اندازه میانگین و میانه برابر است ولی در توزیع نامتقارن شکل ۲ – ۲ بسته به درجه عدم تقارن توزیع ممکن است اختلاف قابل ملاحظه‌ای بین میانگین و میانه مشاهده گردد. مثالی که معمولا بخوبی ارزش کاربرد میانه را در مقایسه با میانگین نشان می‌دهد، مطالعه درباره درآمد جمعیتی است که بیشتر آنها دارای درآمد ناچیز و عده کمی درآمدهای کلان دارند. بدیهی است که در این صورت میانگین، اطلاع قابل توجهی از توزیع درآمد در اختیار نمی‌گذارد ولی با بیان میانه می‌توان اظهار نمود که درآمد نصف جمعیت از میانه کمتر است. همچنین اگر محققی بخواهد براساس مقدار مصرفی شیر افراد یک منطقه درباره وضع تغذیه اهالی اظهار نظر نماید، احتمالاً استفاده از میانگین به عنوان شاخص مصرف، گمراه کننده خواهد بود. چه ممکن است نسبت کمی از جامعه مورد مطالعه مصرف کننده عمده شیر باشد. و برعکس میانه تا حد زیادی به درک مطلب کمک می‌کند و توجیه مناسب از مصرف شیر در اختیار می‌گذارد. بدیهی است که اگر در همین مطالعه برآورد بهای شیر مصرفی مورد نظر باشد میانگین به نحو مطلوبی جوابگو خواهد بود.

در مطالعات بیولوژیکی معمولاً توزیع نتیجه مطالعات نسبتاً متقارن است و در نتیجه میانگین و میانه هر دو شاخص‌های خوبی جهت نشان دادن مرکز توزیع می‌باشند، ولی با این وجود در غالب موارد از میانگین به عنوان شاخص مرکزی استفاده می‌گردد زیرا تعبیر و تفسیر اطلاعات و انجام آزمونهای آماری بوسیله میانگین آسان‌تر و قابل اعتمادتر از میانه است و به علاوه میانگین از اندازه همه افراد مورد مطالعه متاثر است در حالی که در میانه این خاصیت وجود ندارد.

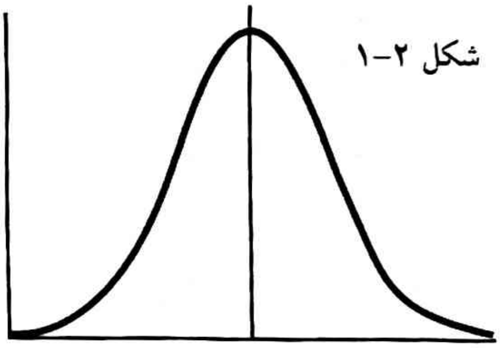
در علوم پزشکی و بهداشت بندرت از نما استفاده می‌گردد با وجود این در اپیدمیولوژی به منظور مبارزه و یا پیشگیری علیه یک بیماری، شناخت سنی که دارای بیشترین فراوانی است بر میانگین و میانه ارجحیت دارد.

لازم به تذکر است که در بعضی از مطالعات علوم تجربی از میانگین دیگری بنام میانگین هندسی[1] استفاده می‌شود که آن را با GM نشان داده و عبارت است از:

$$GM = \sqrt[N]{X_1 X_2 \ldots\ldots X_N}$$

اگر از دو طرف این معادله لگاریتم بگیریم، ملاحظه می‌شود که لگاریتم میانگین هندسی Xها معادل میانگین ساده لگاریتم صفت است یعنی :

$$\log GM = \frac{1}{N}\sum \log X_i$$


شکل ۲-۱


شکل ۲-۲

۲-۳. شاخص‌های پراکندگی[2] (طول میدان تغییرات[3]، میانگین انحرافات[4]، واریانس[5] و انحراف معیار[6])

گرچه شاخص‌های مرکزی مهمترین مشخص کننده برای یک توزیع می‌باشند، ولی بسیار اتفاق می‌افتد که با وجود یکسان بودن مشخص کننده‌های مرکزی، بین دو توزیع تفاوت اساسی وجود دارد. مثلا در یک توزیع بیشتر افراد حول میانگین قرار داشته باشند در صورتی که در توزیع دیگر پراکندگی افراد نسبت به میانگین خیلی زیاد باشد. بدین جهت در این قسمت به ذکر مهمترین شاخص‌هایی که بیان کننده پراکندگی توزیع می‌باشند مبادرت می‌گردد.

ساده‌ترین شاخص پراکندگی، طول میدان تغییرات است که با حرف R مشخص می‌گردد و

1. Geometric mean
2. Measure of dispersion
3. Range
4. Mean deviation
5. Variance
6. Standard deviation

برای بدست آوردن آن باید طبق فرمول (۲-۳) اختلاف کمترین مقدار صفت را از بیشترین مقدار آن محاسبه نمود.

$$R = X_{max} - X_{min} \qquad (۳-۲)$$

چون در محاسبه طول میدان تغییرات تنها از مقدار ماکزیمم و مینیمم اندازه صفت استفاده می‌گردد و تغییرات صفت برای افراد داخل این دو اندازه در آن موثر نیست، بنابراین نمی‌تواند به نحو مطلوبی گویای پراکندگی صفت باشد.

مشخص کننده دیگری برای پراکندگی، میانگین انحرافات (M.D) است که عبارت از میانگین قدر مطلق انحرافات از میانگین می‌باشد. به این دلیل از قدر مطلق انحرافات استفاده می‌شود که جمع جبری اختلاف اعداد از میانگین برابر صفر می‌شود. رابطه (۲-٤) محاسبه میانگین انحرافات را نشان می‌دهد:

$$M.D. = \frac{\sum |X_i - \mu|}{N} \qquad (٤-۲)$$

مثلا برای محاسبه میانگین انحرافات سه عدد ۱۰، ۸، ۱۸ که میانگین آنها برابر ۱۲ است خواهیم داشت:

$$M.D. = \frac{|(۱۰-۱۲)| + |(۸-۱۲)| + |(۱۸-۱۲)|}{۳} = \frac{۲+٤+٦}{۳} = ٤$$

در این مثال مفهوم عدد ٤ این است که سه عدد ۱۰ و ۸ و ۱۸ به طور متوسط از میانگین خود یعنی ۱۲ به اندازه ٤ اختلاف دارند.

چون در محاسبه میانگین انحرافات از قدر مطلق اختلاف استفاده شده است و انجام عملیات جبری روی قدر مطلق‌ها خالی از اشکال نیست به منظور رفع این نقیصه و همچنین تاثیر بیشتر اعداد دور از میانگین و تاثیر کمتر اعداد حول میانگین، هریک از عبارات $(X_i - \mu)$ را مجذور می‌کنیم. آنگاه مجموع این عبارت‌ها را بر تعداد داده‌ها (N) تقسیم می‌کنیم. به عبارت دیگر به جای میانگین قدر مطلق انحرافات، از میانگین مجذور انحرافات استفاده می‌گردد. شاخص حاصل را واریانس گویند و به حرف یونانی σ^2 (سیگما دو) نشان می‌دهند و برای محاسبه آن از رابطه زیر استفاده می‌گردد:

$$\sigma^2=\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{N} \qquad (۲-۵)$$

مثلاً برای محاسبه واریانس اعداد ۱۰ و ۸ و ۱۸ که میانگین آنها ۱۲ است، خواهیم داشت:

$$\sigma^2=\frac{(10-12)^2+(8-12)^2+(18-12)^2}{3}=\frac{4+16+36}{3}=18/67$$

با عملیات جبری می‌توان عبارت $\Sigma(X_i-\mu)^2$ را بصورت زیر ساده نمود:

$$\sum(X_i-\mu)^2=(X_1-\mu)^2+(X_2-\mu)^2+\ldots+(X_N-\mu)^2$$
$$=(X_1^2+\mu^2-2X_1\mu)+(X_2^2+\mu^2-2X_2\mu)+\ldots+(X_N^2+\mu^2-2X_N\mu)$$
$$=\sum X_i^2+N\mu^2-2\mu\sum X_i=\sum X_i^2+N\left(\frac{\sum X_i}{N}\right)^2-2\left(\frac{\sum X_i}{N}\right)\sum X_i$$
$$=\sum X_i^2+\frac{(\sum X_i)^2}{N}-\frac{2(\sum X_i)^2}{N}=\sum X_i^2-\frac{(\sum X_i)^2}{N}$$

و بدین ترتیب می‌توان فرمول (۲ -۵) را به صورت زیر ارائه نمود که در عمل کاربرد آن ساده‌تر است:

$$\sigma^2=\frac{\sum X_i^2-\frac{(\sum X_i)^2}{N}}{N} \qquad (۲-۶)$$

در صورتیکه نتیجه مشاهدات مانند جدول ۲ – ۲ باشد، فرمول (۲ – ۵) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma^2=\frac{\sum N_i(X_i-\mu)^2}{N}=\frac{\sum N_iX_i^2-\frac{(\sum N_iX_i)^2}{N}}{N} \qquad (۲-۷)$$

بدیهی است در مورد صفت کمی پیوسته که جدول توزیع فراوانی آن معمولا بصورت گروه‌بندی شده بیان می‌شود، محاسبه مشخص کننده‌های پراکندگی چون مشخص کننده‌های مرکزی تنها با استفاده از روش تقریبی امکان‌پذیر خواهد بود.

عملیات زیر چگونگی محاسبه واریانس را برای داده‌های جدول ۲ – ۲ با استفاده از رابطه (۲ -۷) نشان می‌دهد:

جدول ۲-٤.

کرانه‌های گروه	N_i	X_i	N_iX_i	$N_iX_i^2$
۹۰ – ۱۰۰	۱۵	۹۵	۱٤۲۵	۱۳۵۳۷۵
۱۰۰ – ۱۱۰	۵۷	۱۰۵	۵۹۸۵	٦۲۸٤۲۵
۱۱۰– ۱۲۰	۸۲	۱۱۵	۹٤۳۰	۱۰۸٤٤۵۰
۱۲۰ – ۱۳۰	۱۵۵	۱۲۵	۱۹۳۷۵	۲٤۲۱۸۷۵
۱۳۰ – ۱٤۰	۱۰۵	۱۳۵	۱٤۱۷۵	۱۹۱۳٦۲۵
۱٤۰ – ۱۵۰	۸٦	۱٤۵	۱۲٤۷۰	۱۸۰۸۱۵۰
۱۵۰ – ۱٦۰	۳۳	۱۵۵	۵۱۱۵	۷۹۲۸۲۵
۱٦۰ – ۱۷۰	۲۹	۱٦۵	٤۷۸۵	۷۸۹۵۲۵
۱۷۰ – ۱۸۰	۲۱	۱۷۵	۳٦۷۵	٦٤۳۱۲۵
۱۸۰ – ۱۹۰	۵	۱۸۵	۹۲۵	۱۷۱۱۲۵
۱۹۰ – ۲۰۰	۱٦	۱۹۵	۳۱۲۰	٦۰۸٤۰۰
جمع	٦۰٤	–	۸۰٤۸۰	۱۰۹۹٦۹۰۰

$$\sigma^{۲} = \frac{۱۰۹۹٦۹۰۰ - \frac{(۸۰٤۸۰)^{۲}}{٦۰٤}}{٦۰٤} = ٤۵۲/۵۵$$

گرچه واریانس به نحو مطلوبی پراکندگی اعداد را مشخص می‌کند ولی به هر حال واحـد آن از نوع مربع واحد اندازه خود صفت است. برای رفـع ایـن اشـکال از واریـانس جـذر گرفتـه و آن را انحراف معیار می‌نامند. در این صورت σ معرف انحراف معیار بوده و خواهیم داشت:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^{۲}} = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \mu)^{۲}}{N}} = \sqrt{\frac{\sum X_i^{۲} - \frac{(\sum X_i)^{۲}}{N}}{N}} \qquad (۸-۲)$$

بدین ترتیب انحراف معیار اعداد ۸ و ۱۰ و ۱۸ مسـاوی $\sqrt{۱۸/٦۷}$ یعنـی ٤/۳۲ و انحـراف معیـار داده‌های جدول۲ -٤ برابر $\sqrt{٤۵۲/۵۵}$ یعنی ۲۱/۲۷ خواهد شد.

۲-٤. تاثیر تغییرات یکنواخت در مشاهدات

چون در پاره‌ای از محاسبات آماری تغییر یکنواخت مشاهدات بار عملیات را کـاهش مـی‌دهـد، در این قسمت، تاثیری که کم یا اضافه کردن یک عدد ثابت به نتیجه مشاهدات و همچنین ضرب یا

تقسیم کردن نتیجه مشاهدات در یک عدد ثابت روی میانگین و واریانس می‌گذارد، مورد بحث قرار می‌گیرد و از آنجا روش کوتاه‌تری برای محاسبه این دو شاخص بیان می‌گردد.

چنانچه نتیجه مشاهدات یعنی مقادیر $X_۱, X_۲ ... X_N$ را با عدد ثابتی مثلا ۱۰ جمع کنیم مقادیری جدید یعنی $X_۱ + ۱۰$، $X_۲ + ۱۰$، ...، $X_N + ۱۰$ حاصل می‌گردد که میانگین آنها برابر است با :

$$\frac{(X_۱+۱۰)+(X_۲+۱۰)+....+(X_N+۱۰)}{N}$$

که چون در صورت کسر عدد ثابت ۱۰ برای N بار تکرار می‌گردد، بنابراین می‌توانیم رابطه فوق را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{\sum X_i + ۱۰N}{N} = \frac{\sum X_i}{N} + ۱۰ = \mu + ۱۰$$

یعنی به میانگین مقادیر اولیه نیز عدد ۱۰ اضافه شده است. حال چنانچه واریانس مقادیر جدید را محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\sum[(X_i+۱۰)-(\mu+۱۰)]^۲}{N} = \frac{\sum(X_i-\mu)^۲}{N}$$

یعنی در مقدار واریانس تغییری حاصل نگردیده است و می‌توان نتایج فوق را به صورت کلی زیر بیان نمود:

هرگاه داده‌ها را با عدد ثابتی جمع (یا کم) کنیم میانگین به همان اندازه زیاد (یا کم) می‌شود ولی در واریانس تغییری حاصل نمی‌گردد.

اینک چنانچه نتیجه مشاهدات را در عدد ثابت C ضرب کنیم، مقادیری جدید یعنی $CX_۱$، $CX_۲$، $CX_۳$، ...، CX_N حاصل می‌شود که میانگین آنها برابر است با :

$$\frac{\sum CX_i}{N}$$

که چون در صورت کسر عدد ثابت C ضریب کلیه X_i ها می‌باشد، بنابراین می‌توان از C فاکتور گرفت و رابطه فوق را به صورت زیر خلاصه نمود:

$$\frac{\sum CX_i}{N} = \frac{C\sum X_i}{N} = C\mu$$

یعنی میانگین هم C برابر بزرگ شده است. حال چنانچه واریانس این مقادیر جدید را محاسبه

کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\sum(CX_i - C\mu)^2}{N} = \frac{\sum C^2(X_i - \mu)^2}{N} = \frac{C^2\sum(X_i - \mu)^2}{N} = C^2\sigma^2$$

یعنی واریانس C^2 برابر و یا انحراف معیار C برابر بزرگ شده است و می‌توان نتایج اخیر را به صورت کلی زیر بیان نمود:

هرگاه داده‌ها را در عدد ثابتی ضرب (یا تقسیم) کنیم میانگین و انحراف معیار به همان نسبت بزرگ (یا کوچک) می‌شود ولی واریانس به نسبت مجذور عدد ثابت بزرگ (یا کوچک) می‌شود.

استفاده از خواص فوق محاسبه میانگین و واریانس را برای داده‌های جداولی چون جدول ۲-۲ به نحو قابل توجهی کوتاه می‌سازد. بدین طریق، یکی از مقادیر X_i را (معمولا آن را که دارای فراوانی بیشتر است) که $X.$ می‌نامیم از کلیه X_i ها کم کرده و حاصل را به فاصله گروه (h) تقسیم می‌کنیم و متغیر جدید را به X_i' نشان می‌دهیم:

$$X_i' = \frac{X_i - X.}{h}$$

بنابراین لازم است میانگین متغیر جدید را در فاصله گروه (h) ضرب و آنگاه جواب آن را با $X.$ جمع کرد تا میانگین اصلی نتیجه گردد. بدیهی است در مورد واریانس تنها کافی است که واریانس متغیر جدید را در مجذور فاصله گروه یعنی h^2 ضرب کنیم، چه کم کردن $X.$ در مقدار واریانس تاثیری نمی‌گذارد. عملیات زیر چگونگی محاسبه میانگین و واریانس داده‌های جدول ۲-۲ را از روش کوتاه فوق نشان می‌دهد.

کرانه‌های گروه	N_i	X_i	$X_i' = \frac{X_i - ۱۲۵}{۱۰}$	N_iX_i'	$N_iX_i'^2$
۹۰ − ۱۰۰	۱۵	۹۵	−۳	−۴۵	۱۳۵
۱۰۰ − ۱۱۰	۵۷	۱۰۵	−۲	−۱۱۴	۲۲۸
۱۱۰ − ۱۲۰	۸۲	۱۱۵	−۱	−۸۲	۸۲
۱۲۰ − ۱۳۰	۱۵۵	۱۲۵	۰	۰	۰
۱۳۰ − ۱۴۰	۱۰۵	۱۳۵	۱	۱۰۵	۱۰۵
۱۴۰ − ۱۵۰	۸۶	۱۴۵	۲	۱۷۲	۳۴۴
۱۵۰ − ۱۶۰	۳۳	۱۵۵	۳	۹۹	۲۹۷
۱۶۰ − ۱۷۰	۲۹	۱۶۵	۴	۱۱۶	۴۶۴
۱۷۰ − ۱۸۰	۲۱	۱۷۵	۵	۱۰۵	۵۲۵
۱۸۰ − ۱۹۰	۵	۱۸۵	۶	۳۰	۱۸۰
۱۹۰ − ۲۰۰	۱۶	۱۹۵	۷	۱۱۲	۷۸۴
جمع	۶۰۴	−	−	۴۹۸	۳۱۴۴

$$\mu_{X'} = \frac{۴۹۸}{۶۰۴} = ۰/۸۲۴۵$$

$$\mu_X = \mu = ۰/۸۲۴۵ \times ۱۰ + ۱۲۵ = ۱۳۳/۲۵$$

$$\sigma_{x'}^{۲} = \frac{\sum N_i X_i'^{۲} - \frac{(\sum N_i X_i')^{۲}}{N}}{N} = \frac{۳۱۴۴ - \frac{(۴۹۸)^{۲}}{۶۰۴}}{۶۰۴} = ۴/۵۲۵۵$$

$$\sigma_x^2 = \sigma^{۲} = (۱۰)^{۲} \times ۴/۵۲۵۵ = ۴۵۲/۵۵$$

به طور کلی چنانچه ترکیب خطی $a_۱X_۱ + a_۲X_۲ + ... + a_kX_k$ را داشته باشیم و میانگین و واریانس متغیرهای $X_۱$ تا X_k به ترتیب برابر $\mu_۱$ تا μ_k و $\sigma_۱^۲$ تا $\sigma_k^۲$ باشد، به شرط آنکه Xها از هم مستقل باشند، میانگین و واریانس عبارت فوق برابر است با :

$$\mu = a_۱ \mu_۱ + a_۲ \mu_۲ + ... + a_k \mu_k \qquad (۹-۲)$$

$$\sigma ۲ = a_۱^۲ \sigma_۱^۲ + a_۲^۲ \sigma_۲^۲ + ... + a_k^۲ \sigma_k^۲ \qquad (۱۰-۲)$$

۲-۵. ضریب تغییرات[1]

از مطالب گذشته چنین استنباط می‌شود که در غالب موارد می‌توان از انحراف معیار به عنوان مناسبت‌ترین شاخص پراکندگی استفاده کرد. ولی چون این کمیت از نوع خود صفت است، در نتیجه اگر مقایسه تغییرات دو صفت یا یک صفت با دو واحد مختلف مورد نظر باشد، مطالعه انحراف معیار به تنهایی گمراه کننده خواهد بود. مثلاً اگر در یک جامعه انسانی مقایسه پراکندگی توزیع افراد از نظر فشار خون (میلی‌متر جیوه) و وزن بدن (کیلوگرم) مورد نظر باشد، انحراف معیار در مورد صفت اول برحسب میلی‌متر جیوه و در مورد صفت دوم برحسب کیلوگرم بیان می‌شود که قابل مقایسه نمی‌باشند. یا اگر منظور مقایسه پراکندگی توزیع وزن بدن در دو جامعه باشد که در یکی واحد اندازه‌گیری کیلوگرم و در دیگری پوند است، چون انحراف معیار برای جامعه اول بر حسب کیلوگرم و در جامعه دوم بر حسب پوند بیان خواهد شد در نتیجه این مقایسه براساس انحراف معیار منطقی نخواهد بود.

به منظور رفع این اشکال از نسبت انحراف معیار به میانگین که معمولاً به صورت درصد بیان می‌شود استفاده می‌گردد. کمیت حاصل را که یک مشخص کننده نسبی است به C.V نشان می‌دهیم

1. Coefficient of variation

و طبق تعریف:

$$C.V = \frac{۱۰۰\sigma}{\mu} \qquad (۲-۱۱)$$

به عنوان مثال اگر میانگین و انحراف معیار درجه حرارت بدن برای افراد یک جامعه به ترتیب اعداد ۳۶/۹ و ۰/۱۸ درجه باشد و میانگین و انحراف معیار تعداد ضربان نبض به ترتیب ۷۸ و ۹ بار در دقیقه باشد، برای محاسبه ضریب تغییرات خواهیم داشت:

$$C.V = \frac{۱۰۰ \times ۰/۱۸}{۳۶/۹} = ۰/۵$$

$$C.V = \frac{۹ \times ۱۰۰}{۷۸} = ۱۱/۵$$

و می‌توان پراکندگی ضربان نبض را $\frac{۱۱/۵}{۰/۵} = ۲۳$ برابر پراکندگی درجه حرارت بدن دانست.

تمرین

۱. اطلاعات زیر نتایج اندازه‌گیری مقدار کل آلبومین خون را در ۳۰ مـرد سـالم مـورد آزمـایش برحسب گرم نشان می‌دهد:

١١٦	١٤٦	١٣٦	١١٩	١٠٦	١١٨
١١٨	١٥٣	١٤٣	١٢٢	١١٦	١٣٩
١٢٧	١٠٦	١٤٥	١٢٩	١٢٠	١٢٢
١٣٠	١١٤	١٤٦	١٣٣	١٢٤	١٤١
١٣٣	١٣١	١٤٤	١٤٦	١٣٣	١٤١

مطلوبست:

الف: محاسبه میانگین، میانه، واریانس و انحراف معیار

ب: اطلاعات فوق را به فواصل ۱۰ گرم گروه بندی نموده و مجدداً شاخص‌های قسـمت اول را محاسبه کنید و نتایج حاصل را با یکدیگر مقایسه نمایید.

۲. اطلاعات زیر نتایج اندازه‌گیری تعداد ضربان نبض در (دقیقه) را در ۱۰۰ دانشجو نشان می‌دهد:

ضربان نبض	فراوانی
٥٠ — ٥٤	١
٥٥ — ٥٩	٥
٦٠ — ٦٤	٧
٦٥ — ٦٩	١٦
٧٠ — ٧٤	٢٠
٧٥ — ٧٩	٢٣
٨٠ — ٨٤	١٣
٨٥ — ٨٩	١٢
٩٠ — ٩١	٣
جمع	١٠٠

میانگین، واریانس و انحراف معیار این اطلاعات را از راه معمولی و از طریق کوتاه محاسبه کنید.

۳. میانگین، میانه، نما، میانگین انحرافات، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات اطلاعات مربوط به کلسترول خون را که در تمرین ٦ فصل اول آمده است محاسبه کنید.

٤. اگر از متغیر X عدد ثابت a کم و حاصل را بر k تقسیم کنیم، در میانگین و انحراف معیار آن چه تغییری رخ می‌دهد. اگر همین متغییر را بر k تقسیم و از حاصل تقسیم عدد ثابت a کم کنیم، تغییرات میانگین و انحراف معیار به چه صورت خواهد شد، تاثیر این تغییرات را بر میانگین و انحراف معیار با یکدیگر مقایسه و نتیجه را بیان کنید.

٥. اگر جامعه‌ای با اندازه N فرد به دو زیر جامعه به اندازه‌های N_1 و N_2 فرد تقسیم شود و میانگین صفتی در این دو زیر جامعه به ترتیب برابر μ_1 و μ_2 بدست آید، براساس اطلاعات موجود رابطه‌ای برای بدست آوردن میانگین صفت مورد مطالعه در جامعه یعنی μ بنویسید.

٦. اگر در تمرین ٥ واریانس صفت مورد مطالعه به ترتیب برابر σ_1^2 و σ_2^2 در دو زیر جامعه مورد بحث باشد، درستی رابطه زیر را که در آن σ^2 معرف واریانس صفت در جامعه است تحقیق کنید:

$$\sigma^2 = \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2} + \frac{N_1N_2(\mu_1 - \mu_2)^2}{(N_1 + N_2)^2}$$

۷. اطلاعات زیر مربوط به توزیع تعداد اولاد مادرانی است که در یک کارخانه داروسازی کار می‌کنند.

تعداد اولاد	فراوانی
۱	۵
۲	۷
۳	۱۵
٤	۸
٥	۲
٦	۳
جمع	٤۰

الف: میانگین، میانه، واریانس و انحراف معیار این اطلاعات را محاسبه کنید.

ب: نمودار توزیع تجمعی آن را برحسب فراوانی تجمعی نسبی رسم و از روی آن مقدار میانه را بدست آورید و معلوم کنید که ۹۰ درصد مادران حداکثر چه تعداد اولاد دارند.

۸. اطلاعات تمرین شماره ۷ را برحسب منطقه سکونت مادران (جنوب و شمال شهر) به دو زیر جامعه بصورت زیرتقسیم می‌کنیم:

ساکنین شمال شهر		ساکنین جنوب شهر	
تعداد اولاد	فراوانی	تعداد اولاد	فراوانی
۱	۳	۱	۲
۲	٤	۲	۳
۳	۷	۳	۸
٤	۲	٤	٦
۵	۱	۵	۱
٦	۱	٦	۲
جمع	۱۸	جمع	۲۲

برای هر یک از این زیر جامعه‌ها میانگین و واریانس را محاسبه کنید و باتوجه به نتیجه محاسبه، میانگین و واریانس در تمرین ۷ درباره درستی روابط خواسته شده در تمرینهای ۵ و ٦ تحقیق کنید.

۹. اگر میانگین و انحراف معیار X_1 به ترتیب برابر ۱۰ و ۲ و میانگین و انحراف معیار X_2 به ترتیب برابر ۲۰ و ۵ باشد، به شرط مستقل بودن X_1 ،X_2 مطلوبست محاسبه اندازه میانگین و واریانس متغیر Y

$y = 2X_1 + 4X_2$

۱۰. میانگین و ضریب تغییرات DMF در یک نمونه به ترتیب ٤ و ۰/۲۵ است. انحراف معیار برابر است با :

الف) ۲ ب) ۱

ج) ۰/۲۵ د) ۱/۲۵

۱۱. اگر مقادیر X را در عدد ثابت و مثبت K ضرب کنیم ضریب تغییرات (C.V) چه تغییری می‌کند؟

الف) تغییری نمی‌کند ب) K برابر می‌شود

ج)تقسیم بر K می‌شود د) K^2 برابر می‌شود

۱۲. اگر صفت X در جامعه‌ای دارای میانگین ۱۵ و واریانس صفر باشد، میانه و نما به ترتیب برابر خواهد بود با :

الف) ۱۵ و ۱۵ ب) ۰ و ۱۵

ج ۰ و ۰ د) قابل تعیین نیست.

۱۳. میانه اعداد ۱، ۲، ۵، ۱۱ و ۳ برابر است با :

الف) ۵ ب) ۳

ج) ٦ د) ۲

۱٤. اگر واحد اندازه‌گیری را از متر به سانتیمتر تبدیل کنیم مقدار عددی:

الف) واریانس تغییر نمی‌کند. ب) واریانس ۱۰۰ برابر می‌شود.

ج) انحراف معیار ۱۰۰ برابر می‌شود. د) انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

۱۵. اگر در مشاهدات، یک داده پرت (outlier) وجود داشته باشد، نتیجه بارز آن روی کدام مشخص کننده زیر است:

الف) میانگین ب) میانه

ج) نما د) فاصله چارک اول و سوم

۱٦. درآمد سرانه برای خانوارهای کمتر از ٤ نفر برابر A و برای خانوارهای ٤ نفر و بیشتر برابر B است. اگر نیمی از خانوارها ٤ نفر و بیشتر باشند درآمد سرانه کل برابر با:

الف) $\frac{A+B}{۲}$ ب) A+B

ج) $\sqrt{AB}$ د: با این اطلاعات قابل محاسبه نیست.

۱۷. توزیع رتبه تولد در ٤۰ نفر دانشجویان یک کلاس عبارت است از:

رتبه تولد	۱	۲	۳	٤	۵	≥٦
فراوانی	۸	۱۰	۹	٤	۳	٦

کدام یک از مشخص کننده‌های زیر برای صفت رتبه تولد قابل محاسبه نمی‌باشد:

الف) میانه ب) میانگین

ج) چارک سوم د) نما

۱۸. اگر مقدار صفت برای تمام افراد را در عدد ثابت a ضرب کنیم چه تغییری در انحراف معیار حاصل می‌شود:

الف) در a ضرب می‌شود .　　　ب) در a^2 ضرب می‌شود.

ج) در $\sqrt{a}$ ضرب می‌شود.　　　د) تغییری نمی‌کند.

۱۹. اگر جامعه‌ای به اندازه N فرد به دو زیر مجموعه به اندازه‌های N_1 و N_2 فرد تقسیم شود و میانگین صفت در این دو زیرگروه به ترتیب برابر μ_1 و μ_2 باشد آنگاه در مورد میانگین کل می‌توان گفت:

الف) همواره از هر دو بزرگتر است.

ب) همواره از هر دو کوچکتر است.

ج) همواره در فاصله دو میانگین قرار دارد.

د) بستگی به واریانس صفت دارد.

۲۰. در سوال فوق اگر واریانس صفت در دو زیر گروه به ترتیب σ_1^2 و σ_2^2 باشد، آنگاه می‌توان گفت واریانس برای کل جامعه:

الف) از هر دو کوچکتر است.　　　ب) از هر دو بزرگتر است.

ج) در فاصله دو واریانس قراردارد.　　　د) بستگی به اختلاف میانگین‌ها دارد.

۲۱. در ارائه اطلاعات به صورت جدول، افزایش فاصله گروه ها سبب می شود :

الف)میانگین صفت کاهش یابد.　　　ب)میانگین با دقت کمتری محاسبه شود.

ج) میانگین صفت افزایش یابد.　　　ج)میانگین با دقت بیشتری محاسبه شود.

فصل سوم
احتمال[1]

۳-۱. مقدمه

بمنظور درک مسائل مربوط به استنتاج آماری لازم است ابتدا با مفهوم احتمال آشنا شویم. گرچه از احتمال در انواع مسائل عملی که بعداً مطرح خواهد شد، استفاده می‌گردد ولی به منظور سادگی درک آن مناسب است بیشتر از مثالهای ساده مربوط به مسائل ایده‌آل که در بعضی بازیهای شانس پیش می‌آید، استفاده شود. از این رو است که در اینجا تعاریف و قواعد احتمال را براساس مسائل ایده‌آل بیان می‌کنیم.

۳-۲. تعریف احتمال

احتمال یک حادثه را اندازه امکان وقوع آن که با سه اصل زیر مطابقت داشته باشد تعریف می‌کنیم:

اصل ۱ ـ برای هر حادثه دلخواه A $\qquad P(A) \geq 0$

اصل ۲ ـ برای حادثه یقین S $\qquad P(S) = ۱$

اصل ۳ ـ برای دو حادثه ناسازگار B, A $\qquad P(A \text{ یا } B) = P(A) + P(B)$

آزمایشهایی که نسبت به نتایجش قرینگی دارد احتمال بصورت زیر نوشته می‌شود:

اگر نتیجه آزمایش بتواند به N صورت همتراز (امکان وقوع یکسان) و ناسازگار (وقوع توأم آنها غیرممکن باشد) رخ دهد و از این N صورت M صورت آن برای وقوع حادثه معین A مساعد باشد، گوییم احتمال حادثه A یک کسر متعارفی بصورت $\frac{M}{N}$ است یعنی :

$$P(A) = \frac{M}{N} \qquad (۱-۳)$$

1. Probability

و این همان تعریف کلاسیک احتمال است که بوسیله لاپلاس بیان شده است. اکنون این تعریف را برای حل چند مساله ساده بکار می‌بریم.

مثال ۱ : در پرتاب یک تاس مکعبی شکل نتیجه آزمایش می‌تواند به شش صورت ظاهر شود که اولاً این شش صورت ناسازگارند (وقوع توأم آنها امکان‌پذیر نیست) و ثانیاً اگر تاس خوب درست شده باشد دلیلی برای بیشتر یا کمتر بودن احتمال وقوع روهای مختلف آن وجود ندارد و در نتیجه این شش صورت ممکن همترازند. حال اگر حادثه A عبارت از ظاهر شدن عدد ۲ روی تاس باشد با استفاده از تعریف کلاسیک احتمال چون تعداد حالات مساعد یک و تعداد کل حالات شش است، خواهیم داشت:

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

اگر در همین آزمایش حادثه A ظاهر شدن عدد بزرگتر از ٤ تعریف شده باشد، در این صورت تعداد حالات مساعد ۲ و احتمال مورد نظر عبارت است از:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال ۲ : در کیسه‌ای ٦ گلوله آبی، ٦ گلوله قرمز، ٦ گلوله سفید، ٦ گلوله سیاه وجود دارد که گلوله‌های هر رنگ به ترتیب از ۱ تا ٦ شماره‌گذاری شده‌اند از این کیسه یک گلوله به طور تصادفی بیرون می‌کشیم. اگر A حادثه ظاهر شدن گلوله سیاه باشد، دراین صورت تعداد کل حالات ٢٤ و تعداد حالات مساعد ٦ است که در نتیجه

$$P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

اگر در این مثال حادثه A ظاهر شدن عدد بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ٦ باشد، تعداد حالات مساعد برابر ۱۲ می‌شود (شامل چهار ۳، چهار ٤ و چهار ٥) که در این صورت خواهیم داشت:

$$P(A) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

مثال ۳: از ٢٤ گلوله مثال ۲ یک گلوله به طور تصادفی برمی‌داریم و پس از مشاهده آن مجدداً

گلوله را برگردانده و بعدا از مخلوط کردن آنها یک گلوله دیگر به طور تصادفی برمی داریم. اگر A حادثه ظاهر شدن شماره یک در هر دو بار باشد، تعداد کل حالات ممکن ٢٤ × ٢٤ و تعداد حالات مساعد ٤ × ٤ است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$P(A)=\frac{٤\times٤}{٢٤\times٢٤}=\frac{١}{٣٦}$$

مثال ٤ : اگر در مثال۳، دو گلوله را همزمان یعنی گلوله دوم را بدون برگرداندن گلوله اول انتخاب کنیم، در این صورت تعداد کل حالات ممکن برابر خواهد بود با ٢٤ حالت ممکن برای گلوله اول ضرب در ۲۳ حالت ممکن برای گلوله دوم، و تعداد حالات مساعد برابر خواهد بود با ٤ حالت مساعد برای گلوله اول ضرب در ۳ حالت مساعد برای گلوله دوم، و بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$P(A)=\frac{٤\times٣}{٢٤\times٢٣}=\frac{١}{٤٦}$$

مثال ۵: در پرتاب دوتاس اگر A حادثه ظاهر شدن عدد ۳ برای مجموع روهای دوتاس باشد، در این صورت تعداد کل حالات ممکن برابر ٦ حالت ممکن برای تاس اول ضرب در ٦ حالت ممکن برای تاس دوم یعنی ٣٦ = ٦ × ٦ حالت می‌باشد، و تعداد حالات مساعد عبارت خواهد بود با اولاً ظاهر شدن ۱ برای تاس اول و ۲ برای تاس دوم و ثانیاً ۲ برای تاس اول و ۱ برای تاس دوم، یعنی جمعاً ۲ حالت مساعد وجود دارد. به این ترتیب احتمال حادثه A عبارت خواهد بود از:

$$P(A)=\frac{٢}{٣٦}=\frac{١}{١٨}$$

اگر در این مثال حادثه مورد نظر ظاهر شدن عدد بزرگتر از یک برای مجموع دوتاس باشد بسادگی ملاحظه می‌شود که کلیه حالات برای وقوع آن مناسب است و احتمال آن برابر $\frac{٣٦}{٣٦}$ یعنی ۱ می‌شود و به طور کلی اگر در آزمایشی کلیه حالات ممکن برای وقوع حادثه A مساعد باشد در این صورت خواهیم داشت:

$$P(A)=١$$

چنین حادثه‌ای را حادثه یقین گوییم. بنابراین احتمال حادثه یقین همواره مساوی یک است و به همین ترتیب حادثه‌ای که کلیه حالات ممکن برای وقوع آن نامساعد باشد، احتمال وقوع آن صفر بوده و آن را حادثه غیر ممکن گوییم.

در بسیاری از مسائل، محاسبه احتمال حادثه مورد نظر بسادگی مثالهای مذکور در فوق نمی‌باشد، و اصولاً ممکن است حادثه مورد نظر خود ترکیبی از چند حادثه ساده‌تر باشد. این امر لزوم کاربرد قواعد و قضایایی را که بتوان به کمک آنها محاسبه احتمال را برای حوادث پیچیده ممکن ساخت، روشن می‌سازد.

۳-۳. احتمال حاصل جمع

اگر در مثال ۲، حادثه A_1 ظاهر شدن شماره یک و حادثه A_2 ظاهر شدن شماره ۲ باشد، در این صورت برای ظاهر شدن حادثه A_1 یا A_2 تعداد کل حالات همان ۲۴ بوده ولی تعداد حالات مساعد برابر جمع حالات مساعد برای A_1 یعنی ٤ و A_2 یعنی ٤ می‌باشد و به این ترتیب احتمال ظاهر شدن A_1 یا A_2 که آن را $P(A_1 + A_2)$ می‌نامیم برابر است با :

$$P(A_1 + A_2) = \frac{4+4}{24} = \frac{4}{24} + \frac{4}{24} = \frac{8}{24}$$

و به طور کلی اگر A_1 و A_2 دو حادثه ناسازگار باشند، داریم:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) \qquad (۳-۲)$$

با استدلالی مشابه فوق می‌توان فرمول (۳ – ۲) را برای حالاتی که حادثه مورد نظر ترکیبی از چند حادثه مثلاً k حادثه است، نیز تعمیم داد. یعنی اگر A_1 و A_2 ، ... ، A_k حوادث ناسازگار باشند، داریم:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) \qquad (۳-۳)$$

حال فرض می‌کنیم در مثال ۲ حادثه A_1 ظاهر شدن شماره یک و حادثه A_2 ظاهر شدن رنگ قرمز باشد، در این صورت برای ظاهر شدن حادثه A_1 یا A_2 تعداد کل حالات ممکن برابر است با

همان عدد ۲٤. ولی تعداد حالات مساعد دیگر با جمع حالات مساعد برای A_1 و A_2 برابر نمی‌باشد. چون در این صورت شماره یک قرمز یعنی حالت مترادف با A_1 و A_2 دوبار یعنی یکبار در A_1 و یکبار در A_2 تکرار می‌شود که بایستی آن را از جمع حالات، کسر نمود تا تعداد حالات مساعد بدست آید. بدین ترتیب:

$$P(A_1 + A_2) = \frac{٤+٦-١}{٢٤} = \frac{٤}{٢٤} + \frac{٦}{٢٤} - \frac{١}{٢٤} = \frac{٩}{٢٤}$$

و به طور کلی برای دو حادثه A_1 و A_2 داریم:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \qquad (٤-٣)$$

که در آن $P(A_1 A_2)$ احتمال وقوع توام A_1 و A_2 را نشان می‌دهد.

می‌توان رابطه فوق را به بیش از دو حادثه نیز تعمیم داد که در اینجا از ذکر آن خودداری می‌شود.

برای روشن شدن کاربرد فرمول (۳-٤) به ذکر یک مثال ساده می‌پردازیم.

مثال ٦ : یک تاس را دوبار می‌ریزیم. مطلوب است احتمال اینکه اقلا یکبار روی ٥ ظاهر شود.

حل: اگر A_1 حادثه ظاهر شدن ٥ روی تاس اول و A_2 حادثه ظاهر شدن ٥ روی تاس دوم باشد، در این صورت احتمال مورد نظر عبارت خواهد بود از وقوع A_1 یا A_2، برای وقوع A_1 تعداد حالات ممکن ٦ و تعداد حالات مساعد ١ و برای وقوع A_2 تعداد حالات ممکن ٦ وتعداد حالات مساعد ١ و برای وقوع توأم A_1 و A_2 تعداد حالات ممکن ٣٦ و تعداد حالات مساعد یک است. بنابراین با استفاده از فرمول (۳ -٤) داریم:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} - \frac{١}{٣٦} = \frac{١١}{٣٦}$$

اگر نتیجه آزمایشی بتواند فقط به یکی از صورتهای A_1 و A_2 و ... و A_k رخ دهد، دراین صورت A_1، A_2، ... و A_k گروه کامل حوادث را تشکیل می‌دهند و وقوع حادثه A_1 یا A_2 یا ... یا A_k یک حادثه یقین است و خواهیم داشت.

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_k) = ١ \qquad (٥-٣)$$

در صورتیکه گروه کامل حوادث دو به دو ناسازگار نیز باشند، آنها را گروه کامل حوادث ناسازگار نامند، و بنابر فرمول (۳ – ۳) و (۳ – ٥) داریم:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = 1$$

از آنجا که در هر آزمایش وقوع حادثه‌ای مانند A با عدم وقوع آن $\overline{A}$ (نه A) گروه کامل حوادث ناسازگار را تشکیل می‌دهند، خواهیم داشت:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad (۳-۶)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

۳-۴. احتمال حاصلضرب

یک تاس را دوبار می‌ریزیم، اگر A_1 حادثه ظاهر شدن عدد یک روی تاس اول و A_2 حادثه ظاهر شدن عدد زوج روی تاس دوم و A حادثه ظاهر شدن توام A_1 و A_2 یعنی ظاهر شدن یک روی تاس اول و عدد زوج روی تاس دوم باشد، در این صورت برای حادثه A_1 تعداد کل حالات ممکن ٦ و تعداد حالات مساعد ۱ و برای حادثه A_2 تعداد کل حالات ممکن ٦ و تعداد حالات مساعد ۳ و برای حادثه A یعنی حادثه توام A_1 و A_2 که آن را با $A_1 A_2$ نیز نشان می‌دهیم، تعداد کل حالات ممکن ٦ × ٦ و تعداد حالات مساعد برابر ۳ × ۱ (چون از ترکیب هر حالت مساعد A_1 و A_2 یک حالت مساعد برای $A_1 A_2$ بدست می‌آید) می‌باشد. به این ترتیب:

$$P(A_1) = \frac{1}{6}$$

$$P(A_2) = \frac{3}{6}$$

$$P(A) = P(A_1 A_2) = \frac{1 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$$

به طور کلی اگر A_1 و A_2 دو حادثه‌ای باشند که وقوع یا عدم وقوع یکی در وقوع یا عدم وقوع دیگری تاثیر نداشته باشند، (دو حادثه مستقل از هم) خواهیم داشت:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \times P(A_2) \qquad (۳-۷)$$

با استدلالی مشابه فوق می‌توان فرمول (۳-۷) را به بیش از دو حادثه نیز تعمیم داد. یعنی اگر A_1 ، A_2، ... و A_k حوادثی مستقل باشند، خواهیم داشت:

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_k) = P(A_1) . P(A_2) . P(A_3) \ldots . P(A_k) \qquad (\text{۸-۳})$$

مثال ۷: بفرض اینکه پسر یا دختر بودن یک فرزند، در احتمال پسر یا دختر بودن فرزند بعدی تأثیر نداشته باشد، و در هر بار احتمال پسر بودن برابر $\frac{1}{2}$ باشد، می‌خواهیم این احتمال را که ٤ فرزند متوالی یک خانواده پسر باشند محاسبه کنیم. اگر A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 به ترتیب حادثه پسر بودن برای فرزند اول، دوم، سوم و چهارم باشند در این صورت با استفاده از فرمول (۳-۸) احتمال حادثه مورد نظر عبارت خواهد بود از:

$$P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1) . P(A_2) . P(A_3) . P(A_4)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

مثال ۸ : اگر از ٢٤ گلوله مثال ۲، دو گلوله به طور تصادفی برداریم و A_1 حادثه ظاهر شدن یک برای گلوله اول و A_2 حادثه ظاهر شدن کمتر از ۳ برای گلوله دوم باشد، در این صورت برای حادثه A_1 تعداد کل حالات ممکن ٢٤ و تعداد حالات مساعد برابر ٤ است و در نتیجه احتمال حادثه A_1 برابر است با :

$$P(A_1) = \frac{4}{24}$$

و نیز ملاحظه می‌شود که برای حادثه $A_1 A_2$ تعداد کل حالات ممکن برابر است با حاصلضرب ٢٤ حالت ممکن مربوط به انتخاب گلوله اول در ۲۳ حالت ممکن مربوط به انتخاب گلوله دوم و تعداد حالات مساعد برای این حادثه عبارت خواهد بود از حاصلضرب ٤ حالت مساعد مربوط به انتخاب اول در۷ حالت مساعد مربوط به انتخاب دوم (چون اگر گلوله اول یک باشد تنها ۷ گلوله کمتراز ۳ باقی می‌ماند). در نتیجه احتمال حادثه $A_1 A_2$ برابر می‌شود با :

$$P(A_1 A_2) = \frac{4 \times 7}{24 \times 23} = \frac{7}{138}$$

اکنون حادثه ظاهر شدن گلوله کمتر از ۳ را برای گلوله دوم بشرطی که بدانیم گلوله اول یک ظاهر شده است در نظر می‌گیریم. برای این حادثه که آن را حادثه A_2 بشرط حادثه A_1 می‌نامیم و

با $A_2|A_1$ نشان می‌دهیم، تعداد کل حالات برابر ۲۳ (چون می‌دانیم یک گلوله از تعداد کل گلوله‌ها کم شده است) و تعداد حالات مساعد برابر ۷ (چون می‌دانیم یک گلوله یک که کمتر از ۳ است از تعداد ۸ گلوله کمتر از ۳ کم شده است) می‌باشد. و بنابراین احتمال حادثه مورد نظر برابر خواهد بود با :

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{7}{23}$$

اگر کسر سمت راست را یکبار در $\frac{4}{24}$ ضرب و یکبار به $\frac{4}{24}$ تقسیم کنیم داریم:

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{\frac{4}{24} \times \frac{7}{23}}{\frac{4}{24}}$$

ملاحظه می‌شود که مخرج این کسر همان احتمال ساده حادثه A_1 و صورت کسر احتمال توام A_1 A_2 می‌باشد، و به طور کلی می‌توان نوشت:

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} \qquad (۳-۹)$$

از رابطه (۳-۹) می‌توان فرمول کلی زیر را برای احتمال حاصلضرب دو حادثه بدست آورد:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) . P(A_2|A_1) \qquad (۳-۱۰)$$

مثال ۹: در مثال خارج کردن دو گلوله از ۲٤ گلوله (بدون جای گذاری)، اگر حادثه A_1 ظاهر شدن رنگ قرمز روی گلوله اول و حادثه A_2 ظاهر شدن رنگ قرمز روی گلوله دوم باشد و بخواهیم احتمال ظاهر شدن رنگ قرمز را روی هر دوگلوله حساب کنیم، طبق رابطه (۳-۱۰) خواهیم داشت:

$$P(A_1 A_2) = \frac{6}{24} \times \frac{5}{23} = \frac{5}{92}$$

که در آن $\frac{6}{24}$ برابر احتمال ظاهر شدن رنگ قرمز روی گلوله اول و $\frac{5}{23}$ برابر احتمال ظاهر شدن رنگ قرمز روی گلوله دوم به شرط قرمز بودن گلوله اول می‌باشد.

چنانچه رابطه ۳ – ۱۰ را برای دو حادثه A و B به صورت زیر بنویسیم:

$$P(AB) = P(A|B). P(B)$$
$$P(AB) = P(B|A). P(A)$$

با توجه به یکسان بودن سمت چپ دو رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$P(B|A)=\frac{P(A|B).P(B)}{P(A)} \qquad (۱۱-۳)$$

این فرمول همان قضیه بیز[1] است که با ذکر مثالی مفهوم و کاربرد آن را روشن می‌کنیم. اگر A معرف مثبت بودن تست ورزش و B معرف ابتلابه بیماری کرونر قلب برای جامعه‌ای به شرح زیر باشد:

$$P(B) = ۰/۷$$
$$P(A) = ۰/۶۳$$

چنانچه احتمال مثبت بودن تست ورزش برای کسانی که بیماری کرونر قلب دارند برابر:

$$P(A|B)=۰/۸$$

باشد، در این صورت با توجه به رابطه (۳-۱۱) احتمال بیمار بودن فردی که دارای تست مثبت ورزش است برابر است با :

$$P(B|A)=\frac{۰/۸\times ۰/۷}{۰/۶۳}=۰/۸۸$$

چنانچه در همین مثال، احتمال منفی بودن تست ورزش برای کسانی که بیماری کرونر قلب ندارند برابر :

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = ۰/۷۴$$

باشد، در این صورت با توجه به رابطه (۳-۱۱) احتمال بیمار نبودن فردی که دارای تست منفی است برابر است با :

$$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{۰/۷۴\times ۰/۳}{۰/۳۷}=۰/۶۰$$

در اپیدمیولوژی اعداد ۰/۷۰، ۰/۸۰، ۰/۷۴، ۰/۸۸ و ۰/۶۰ را به ترتیب میزان با نسبت شیوع[2]، حساسیت[3] تست، ویژگی[4] تست، ارزش اخباری مثبت[5] تست و ارزش اخباری منفی[6] تست می‌نامند.

1. Bayes
2. Prevalence proportion
3. Sensitivity
4. Specificity
5. Positive predictive value
6. Negative predictive value

در رابطه (۳-۱۱) ممکن است مقدار P(A) مستقیماً داده نشود بلکـه P (A | B) و $P(A|\overline{B})$ در دست باشد، دراین صورت می‌توان نوشت:

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) \tag{۳-۱۲}$$
$$= P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

در نتیجه رابطه (۳-۱۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B) + (P(A \mid \overline{B})P(\overline{B})} \tag{۳-۱۳}$$

۳-۵. توزیع دو جمله‌ای[1] و آزمایشات تکراری

توزیع دو جمله‌ای یکی از مهمترین توزیع‌های صفات گسسته است که کـاربرد عملـی فـراوان دارد. ضمناً این توزیع دارای صورتهای حدی بسیار جالبی است که هـر یـک بـه نوبـه خـود حـائز اهمیت می‌باشند.

این توزیع مربوط به تکرار آزمایش است، وقتی احتمال موفقیت در هر بار آزمایش مقدار ثـابتی باشد و در تکرار آزمایش مقدار آن تغییر نکند.

فرض می‌کنیم احتمال وقوع حادثه A که آن را موفقیت می‌نامیم، در یک آزمایش برابر p باشـد. اگر این آزمایش را تحت شرایط یکسان دوبار تکرار کنیم، حالات مختلف از نظـر ترتیـب موفقیـت عبارتند از:

هر دو موفقیت	$A\ A$
بار اول موفقیت و بار دوم عدم موفقیت	$A\ \overline{A}$
بار اول عدم موفقیت و بار دوم موفقیت	$\overline{A}\ A$
هر دوبار عدم موفقیت	$\overline{A}\ \overline{A}$

چون این دو آزمایش به صورت مستقل از هم و تحت شرایط یکسان انجام شده است، بنـابراین طبق رابطه (۳-۸) احتمال‌های متناظر با حالات فوق عبارت خواهند بود از:

1. Binomial distribution

$$P(A\ A) = P(A).P(A) = p \times p = p^{۲}$$
$$P(A\ \overline{A}) = P(A).P(\overline{A}) = p(۱-p)$$
$$P(\overline{A}\ A) = P(\overline{A}).P(A) = (۱-p)p$$
$$P(\overline{A}\ \overline{A}) = P(\overline{A}).P(\overline{A}) = (۱-p)(۱-p) = (۱-p)^{۲}$$

در اینجا ملاحظه می‌شود که احتمال دوبار موفقیت برابر $p^{۲}$ و احتمال یکبار موفقیت با استفاده از فرمول (۳-۲) و با درنظر گرفتن اینکه از دو حادثه ناسازگار تشکیل شده است، برابر است با:

$$p(۱-p)+(۱-p)p = ۲p(۱-p)$$

و احتمال صفر بار موفقیت برابر با $(۱-p)^{۲}$ می‌باشد. اگر $۱-p$ را با q نشان دهیم، بسادگی ملاحظه می‌شود که این جملات یعنی $p^{۲}$ و $۲pq$ و $q^{۲}$ از بسط دو جمله‌ای $(p+q)^{۲}$ حاصل می‌شوند. اگر آزمایش فوق را سه بار تکرار کنیم، حالات مختلف از نظر ترتیب موفقیت عبارت خواهند بود از:

هر سه بار موفقیت	AAA
بار اول و دوم موفقیت و بار سوم عدم موفقیت	$AA\overline{A}$
بار اول و سوم موفقیت و بار دوم عدم موفقیت	$A\overline{A}A$
بار اول موفقیت و بار دوم و سوم عدم موفقیت	$A\overline{A}\overline{A}$
بار اول عدم موفقیت و بار دوم و سوم موفقیت	$\overline{A}AA$
بار اول و سوم عدم موفقیت و بار دوم موفقیت	$\overline{A}A\overline{A}$
بار اول و دوم عدم موفقیت و بار سوم موفقیت	$\overline{A}\overline{A}A$
هر سه بار عدم موفقیت	$\overline{A}\overline{A}\overline{A}$

و چون آزمایش‌ها مستقل از هم و تحت شرایط یکسان انجام شده است، بنابراین براساس رابطه (۳-۸) احتمال متناظر با این حالات عبارت خواهد بود از:

$$P(AAA) = p\times p\times p = p^{۳}$$
$$P(AA\overline{A}) = p\times p\times(۱-p) = p^{۲}(۱-p)$$
$$P(A\overline{A}A) = p(۱-p)p = p^{۲}(۱-p)$$
$$P(A\overline{A}\overline{A}) = p(۱-p)(۱-p) = p(۱-p)^{۲}$$
$$P(\overline{A}AA) = (۱-p)p\times p = p^{۲}(۱-p)$$
$$P(\overline{A}A\overline{A}) = (۱-p)p(۱-p) = p(۱-p)^{۲}$$
$$P(\overline{A}\overline{A}A) = (۱-p)(۱-p)p = p(۱-p)^{۲}$$
$$P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}) = (۱-p)(۱-p)(۱-p) = (۱-p)^{۳}$$

از اینجا با استدلالی مشابه آنچه که در آزمایش با دو تکرار گفته شد، ملاحظه می‌شود که احتمال سه بار موفقیت برابر $p^۳$ و احتمال دوبار موفقیت برابر $۳p^۲(۱-p)$ و احتمال یک بار موفقیت برابر $۳p(۱-p)^۲$ و بالاخره احتمال صفر بار موفقیت برابر $(۱-p)^۳$ می‌باشد. در اینجا نیز اگر $۱-p$ را به q نشان دهیم ملاحظه می‌شود که این جملات یعنی $p^۳$ و $۳p^۲q$ ، $۳pq^۲$ ، $q^۳$ همان جملات حاصل از بسط $(p+q)^۳$ می‌باشند. به طور کلی اگر آزمایش را n بار تکرار کنیم، می‌توان با روش اندوکسیون ریاضی (استقراء کامل ریاضی) نشان داد که احتمال وقوع درست X موفقیت برابر جمله‌ای از بسط $(p+q)^n$ است که در آن توان p برابر X می‌باشد. یعنی اگر احتمال X موفقیت در n آزمایش را با $P_n(X)$ نشان دهیم، رابطه بین X و $P_n(X)$ به صورت جدول (۳-۱) خواهد بود:

جدول ۳-۱. بسط دو جمله‌ای $(p+q)^n$

تعداد موفقیت (X)	احتمال وقوع برای تعداد X موفقیت $p_n(X)$
n	p^n
n -۱	$np^{n-1}q$
n - ۲	$\frac{n(n-۱)}{۱\times۲}p^{n-۲}q^{۲}$
n - ۳	$\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳}p^{n-۳}q^{۳}$
.	.
.	.
.	.
.	q^n

و از اینجا می‌توان نوشت:

$$P_n(X) = C^x_n\, p^x\, (1-p)^{n-x} \qquad (۱۴-۳)$$

در این رابطه C^x_n عبارت است از ترکیب[1] x عنصری از n عنصر، یعنی:

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

که به طور کلی «k!» k فاکتوریل خوانده می‌شود و عبارت است از حاصلضرب اعداد از ۱ تا k و نیز صفر فاکتوریل و یک فاکتوریل هر دو برابر یک تعریف شده است.

جدول شماره I مقادیر C_n^x را مستقیماً در اختیار می‌گذارد. (متذکر می‌گردد که برای $X > \frac{n}{۲}$ از این خاصیت که $C_n^x = C_n^{n-x}$ استفاده می‌شود).

فرمول (۳-۱۴) که رابطه بین تعداد موفقیت و احتمال وقوع آن را در n بار تکرار آزمایش نشان می‌دهد، توزیع دو جمله‌ای می‌نامند.

✓ مثال ۱۰: مشاهدات قبلی نشان داده است که احتمال مرگ در یک عمل جراحی معینی برابر ۰/۱ است. مطلوب است احتمال اینکه در ۵ مورد از این عمل، تعداد مرگ:

الف. ۲ مورد باشد

ب . ٤ مورد باشد

ج. ۵ مورد باشد

د. حداکثر یک مورد باشد

حل:

الف: چون احتمال مرگ در هر یک از این ۵ عمل جراحی ثابت و برابر ۰/۱ فرض شده است، بنابراین اگر حادثه A وقوع مرگ در هر آزمایش باشد احتمال آن $p=P(A)=۰/۱$ و احتمال عکس آن یعنی بهبودی برابر $q = ۱ - ۰/۱ = ۰/۹$ است. با توجه به شرایط مسئله که $n = ۵$ و $x = ۲$ است، طبق رابطه (۳-۱٤) خواهیم داشت:

$$P_۵(۲)=C_۵^۲(۰/۱)^۲(۰/۹)^۳=\frac{۱\times۲\times۳\times٤\times۵}{(۱\times۲)(۱\times۲\times۳)}(۰/۱)^۲(۰/۹)^۳=۰/۰۷۲۹$$

---

1. Combination

ب: مشابه حالت الف، احتمال ٤ مورد مرگ عبارت است از:

$$P_{5}(4)=C_{5}^{4}(0/1)^{4}(0/9)^{1}=\frac{5}{1}(0/1)^{4}(0/9)=0/00045$$

ج: مانند حالت الف و ب برای احتمال ۵ مرگ خواهیم داشت:

$$P_{5}(5)=(0/1)^{5}(0/9)^{0}=0/00001$$

د: برای محاسبه احتمال حادثه حداکثر یک مورد مرگ، باید توجه کرد که این حادثه عبارت از حاصل جمع دو حادثه صفر بار مرگ و یک بار مرگ است و چون این دو حالت ناسازگار می‌باشند، بنابراین احتمال حداکثر یک بار مرگ با مجموع احتمال صفربار مرگ و یک بار مرگ برابر خواهد شد.

$$P_{5}(0)=(0/9)^{5}=0/59049$$

$$P_{5}(1)=\frac{5}{1}(0/1)(0/9)^{4}=0/32805$$

$$P(x\leq 1)=P_{5}(0)+P_{5}(1)=0/59049+0/32805=0/91854$$

در توزیع دو جمله‌ای داشتن x بار موفقیت در n آزمایش، معادل است با اینکه نسبت موفقیت برابر $\frac{x}{n}$ باشد. بدین ترتیب احتمال اینکه نسبت موفقیت برابر $\frac{x}{n}$ باشد عبارت خواهد بود از:

$$p_{n}(\frac{x}{n})=C_{n}^{x}p^{x}(1-p)^{n-x} \qquad (15-3)$$

✓مثال ۱۱ : در پرتاب یک تاس اگر آمدن روی ٦ موفقیت محسوب گردد، احتمال اینکه نسبت موفقیت در پرتاب ۵ تاس، برابر $\frac{2}{5}$ باشد، محاسبه کنید (یعنی از ۵ رویی که ظاهر می‌شود ۲ روی آن ٦ باشد).

حل: با استفاده از رابطه (۳ – ۱۵) خواهیم داشت :

$$P_{5}(\frac{2}{5})=C_{5}^{2}(\frac{1}{6})^{2}(1-\frac{1}{6})^{5-2}$$

$$=\frac{1\times2\times3\times4\times5}{(1\times2)(1\times2\times3)}(\frac{1}{6})^{2}(\frac{5}{6})^{3}=\frac{1250}{7776}$$

در توزیع دو جمله‌ای چنانچه تعداد موفقیت، مورد نظر باشد، میانگین و واریانس به ترتیب

عبارت خواهند بود از np و npq که چگونگی محاسبه آن در قسمت ۳-۹ بعد از بیان مفهوم امید ریاضی ارائه می‌گردد. چنانچه به جای تعداد موفقیت نسبت موفقیت مورد نظر باشد، از آنجا که کلیه مقادیر x به عدد ثابت n تقسیم می‌گردد، طبق مطالب ۲-٤ ملاحظه می‌شود که میانگین و واریانس فراوانی نسبی یعنی $\frac{x}{n}$ به ترتیب برابر p و $\frac{pq}{n}$ می‌گردد.

در حالت خاص که ۱ = n است (به آن توزیع برنولی[1] نیز می‌گویند) همان طور که انتظار می‌رود برای x=۱ یعنی موفقیت در آزمایش احتمال برابر p و برای ۰ = x یعنی عدم موفقیت، احتمال برابر ۱- p خواهد بود.

۳-٦. تعریف آماری احتمال

با استفاده از رابطه (۳-١٤) می‌توان نشان داد که با بزرگ شدن نامحدود n، احتمال اینکه اختلاف فراوانی نسبی مشاهده شده یعنی $\frac{x}{n}$ با احتمال حقیقی یعنی p از هر عدد کوچکی کوچکتر باشد، برابر یک خواهد شد. که این یکی از صور بیان قانون اعداد بزرگ است. به این دلیل در مواردی که نتوان بر طبق تعریف و قواعد محاسبه احتمال، مقدار احتمال حادثه را تعیین کرد، فروانی نسبی را در آزمایشات به اندازه کافی بزرگ به عنوان احتمال حادثه قبول می‌کنیم. احتمالی که به این صورت تعیین می‌گردد، تعریف آماری احتمال می‌باشد.

۳-۷. توزیع پوآسون[2]

یکی دیگر از توزیع‌های مهم برای صفات گسسته که نسبتاً زیاد از آن استفاده می‌شود، توزیع پوآسون است. از این توزیع می‌توان در مسائلی از نوع توزیع دو جمله‌ای که در آن n بسیار بزرگ ولی p بسیار کوچک است، استفاده نمود. در این حالت گرچه می‌توان احتمال x موفقیت را طبق توزیع دو جمله‌ای از فرمول (۳-١٤) محاسبه کرد، ولی این محاسبات طولانی و وقت گیرخواهد بود. لذا در این حالت می‌توان احتمال مورد نظر را با تقریب از رابطهٔ

$$P(x) = e^{-np}\frac{(np)^x}{x!}$$

بدست آورد که در آن e همان پایه لگاریتم طبیعی بوده و مقدار آن ثابت و تقریباً برابر ۲/۷۱۸۳ است. در این رابطه تنها پارامتری که وجود دارد np است که می‌توان آن را به عنوان یک مقدار،

1. Bernoulli distribution
2. Poisson distribution

منظور نمود و به حرف λ نشان داد. چه، بسیاری از اوقات مقدار این پارامتر بدون مشخص بودن n در دست می‌باشد. با قراردادن λ بجای np در رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \qquad (۳-۱۶)$$

جدول شماره II مقادیر $e^{-\lambda}$ را در اختیار می‌گذارد.

توزیعی که در آن رابطه بین مقادیر صفت و احتمال متناظر با آن توسط فرمول (۳-۱۶) بیان می‌شود، توزیع پوآسون می‌نامند. میانگین و واریانس این توزیع هر دو برابر پارامتر λ است. توجیه این مطلب در قسمت ۳-۹ خواهد آمد.

مثال ۱۲: در یک آزمایش تکراری، احتمال موفقیت در هر بار آزمایش p =۰/۰۰۱ است. این آزمایش را ۲۰۰۰ بار تکرار می‌کنیم. احتمال اینکه تعداد موفقیت مشاهده شده برابر ۱ باشد را حساب کنید.

حل:

چنانچه ملاحظه می‌گردد در این مسئله n بسیار بزرگ است و کاربرد توزیع دو جمله‌ای خالی از اشکال نیست. ولی چون مقدار p در اینجا کوچک است لذا می‌توان با تقریب بسیار خوبی احتمال مورد نظر را از کاربرد توزیع پوآسون بدست آورد. به این ترتیب داریم:

$$\lambda = np = ۲۰۰۰ \times ۰/۰۰۱ = ۲$$

و از اینجا طبق رابطه (۳-۱۶) خواهیم داشت:

$$P(۱) = e^{-۲} \frac{۲^۱}{۱!} = \frac{۲}{e^۲} = ۰/۲۷۱$$

مثالی که به نحو مطلوب کاربرد و مفهوم توزیع پوآسون را توجیه می‌کند، مطالعه نمونه خون از نظر تعداد گلبولهای قرمز است. اگر در این آزمایش، فرضاً میدان میکروسکوپ را به صورت تعداد زیادی مربع (n) کوچک در نظر بگیریم، به نحوی که احتمال قرار گرفتن هر یک از گلبولهای قرمز موجود در لام در هر مربع عددی ناچیز مانند p باشد و چنانچه تعداد گلبولهای قرمز موجود در لام با x نشان داده شود، در این صورت با فرض اینکه قرار گرفتن هر گلبول قرمز، در یک مربع کوچک، اثری در احتمال قرار گرفتن سایر گلبولهای قرمز در این مربع نداشته باشد، تعداد گلبولهای قرمزی که در هر مربع معینی قرار می‌گیرد از توزیع پوآسون با میانگین λ = np پیروی می‌کند.

۳-۸. کمیت تصادفی

کمیت تصادفی کمیتی را گویند که مقادیرش را بسته به وقوع حوادث با احتمالهای معینی اختیار کند. برای مثال در انداختن یک تاس عدد ظاهر شده روی تاس کمیتی است تصادفی که مقادیر ۱ و ۲ و ۳ و ٤ و ٥ و ٦ را اختیار می‌کند و احتمال هر یک برابر $\frac{۱}{٦}$ است. یعنی رابطه بین مقادیر صفت و احتمالهای آن به صورت زیر بیان می‌شود:

x_i	۱	۲	۳	٤	٥	٦
p_i	$\frac{۱}{٦}$	$\frac{۱}{٦}$	$\frac{۱}{٦}$	$\frac{۱}{٦}$	$\frac{۱}{٦}$	$\frac{۱}{٦}$

مثال ۱۳: در انداختن دو تاس با هم عدد ظاهر شده روی مجموع دوتاس کمیتی است تصادفی که مقادیر ۲ و ۳ و ... و ۱۲ را با احتمالهایی که توسط جدول زیر نشان داده شده است، انتخاب می‌کنند:

x_i	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
p_i	$\frac{۱}{۳٦}$	$\frac{۲}{۳٦}$	$\frac{۳}{۳٦}$	$\frac{٤}{۳٦}$	$\frac{٥}{۳٦}$	$\frac{٦}{۳٦}$	$\frac{٥}{۳٦}$	$\frac{٤}{۳٦}$	$\frac{۳}{۳٦}$	$\frac{۲}{۳٦}$	$\frac{۱}{۳٦}$

مثال ١٤ : در توزیع دوجمله‌ای، تعداد موفقیت، کمیتی است تصادفی که مقادیر آن ۰، ۱، ... و n و توزیع احتمالهای آن به صورت رابطه (۳-١٤) می‌باشد. در این مثال فراوانی نسبی موفقیت یعنی نسبت تعداد موفقیت به تعداد تکرار آزمایش، کمیتی است تصادفی که مقادیر آن $\frac{۰}{n}$ ، $\frac{۱}{n}$ ، ... و $\frac{n}{n}$ است و قانون توزیع احتمالهای آن به صورت رابطه (۳-۱٥) می‌باشد.

۳-۹. امید ریاضی کمیت تصادفی

اکنون که با مفهوم کمیت تصادفی آشنا شدیم، مناسب است یادآور شویم که میانگین حسابی یک کمیت تصادفی را اصطلاحا امید ریاضی آن کمیت نیز می‌نامند و برای نشان دادن آن از حرف E استفاده می‌شود. در این صورت اگر توزیع یک کمیت تصادفی توسط جدول زیر بیان شود:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots x_n$
p_i	p_1	p_2	p_3	$\dots p_n$

امید ریاضی این کمیت که همان میانگین است، عبارت خواهد بود از:

$$\mu = EX = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

و امید ریاضی $(x_i - \mu)^2$ که همان واریانس است می‌تواند به صورت زیر محاسبه گردد:

$$\sigma^2 = E(x_i-\mu)^2 = p_1(x_1-\mu)^2 + p_2(x_2-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2$$
$$= \sum^{n} p_i(x_i-\mu)^2$$

بدین ترتیب در مثال انداختن یک تاس میانگین و واریانس عدد ظاهر شده روی تاس برابر است با :

$$\mu = EX = \frac{1}{6}(1) + \frac{1}{6}(2) + \frac{1}{6}(3) + \frac{1}{6}(4) + \frac{1}{6}(5) + \frac{1}{6}(6) = \frac{7}{2}$$
$$\sigma^2 = E(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{6}(1-\frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}(2-\frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}(3-\frac{7}{2})^2$$
$$+\frac{1}{6}(4-\frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}(5-\frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}(6-\frac{7}{2})^2 = \frac{35}{12}$$

و در مورد مثال پرتاب دوتاس (مثال ۱۳) میانگین و واریانس کمیت تصادفی مورد نظر برابر است با:

$$\mu = EX = \frac{1}{36}(2) + \frac{2}{36}(3) + \frac{3}{36}(4) + \frac{4}{36}(5) + \frac{5}{36}(6) + \frac{6}{36}(7)$$
$$+\frac{5}{36}(8) + \frac{4}{36}(9) + \frac{3}{36}(10) + \frac{2}{36}(11) + \frac{1}{36}(12) = 7$$

$$\sigma^2 = E(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{36}(2-7)^2 + \frac{2}{36}(3-7)^2 + \frac{3}{36}(4-7)^2$$
$$+\frac{4}{36}(5-7)^2 + \frac{5}{36}(6-7)^2 + \frac{6}{36}(7-7)^2 + \frac{5}{36}(8-7)^2$$
$$+\frac{4}{36}(9-7)^2 + \frac{3}{36}(10-7)^2 + \frac{2}{36}(11-7)^2 + \frac{1}{36}(12-7)^2 = \frac{110}{36}$$

اینک با استفاده از مفهوم امید ریاضی، میانگین و واریانس تعداد موفقیت در توزیع دو جمله‌ای از رابطه (۳-۱۴) به ترتیب عبارتند از:

$$\mu = \sum p_ix_i = \sum^{n} C_n^x p^x q^{n-x} x_i$$

$$\sigma^2 = \sum p_i(x_i-\mu)^2 = \sum^{n} C_n^x p^x q^{n-x}(x_i-\mu)^2$$

و با محاسبات جبری ساده که انجام آن به عهده خواننده محول می‌گردد، نتیجه می‌شود که:

$$\mu = np \qquad (۱۷-۳)$$

$$\sigma^2 = npq \qquad (۱۸-۳)$$

در بدست آوردن رابطه (۳-۱۸) مناسب است ابتدا امید ریاضی X و $X(X-1)$ را محاسبه کرده و توجه داشت که :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= E\{X(X-1) + X\} - (EX)^2 \\ &= EX(X-1) + EX - (EX)^2\end{aligned}$$

چنانچه استدلال فوق را درباره توزیع پوآسون که توسط رابطه (۳-۱۶) بیان می‌شود، بکار بریم نتیجه می‌شود که میانگین و واریانس این توزیع مساوی، و هر دو برابر λ می‌باشد.

۳-۱۰. توزیع فوق هندسی[1]

چنانچه در کیسه‌ای ٦ گلوله قرمز و ٤ گلوله سفید یعنی جمعاً ده گلوله وجودداشته باشد و ما از این کیسه پنج گلوله با هم و یا پنج بار و هر بار یک گلوله را بدون جایگذاری خارج کنیم و بخواهیم احتمال اینکه از ۵ گلوله خارج شده، ۳ گلوله قرمز و ۲ گلوله سفید باشد را محاسبه کنیم، لازم است براساس تعریف کلاسیک احتمال تعداد کل حالات ممکن یعنی تعداد ترکیب ۵ تایی از ۱۰ را در مخرج کسر و حاصلضرب تعداد ترکیب ۳ تایی از ٦ گلوله قرمز و تعداد ترکیب ۲تایی از ٤ گلوله سفید را در صورت کسر قرار دهیم. بنابراین احتمال فوق برابر است با:

$$P\ (\text{قرمز بودن ۳ گلوله}) = \frac{C_6^3 \times C_4^2}{C_{10}^5} = \frac{10}{21}$$

چنانچه در مثال فوق، مقادیر ۳، ۱۰، ۵ و ٦ را به ترتیب با حروف n, N, x و k نشان دهیم، فرمول محاسبه احتمال در توزیع فوق هندسی برابر است با:

$$p(x) = \frac{C_k^x \times C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n} \qquad (۱۹-۳)$$

میانگین و واریانس این توزیع برابر است با:

---

1. Hypergeometric distribution

$$\mu = \frac{k}{N} \times n \qquad (۲۰-۳)$$

$$\sigma^{۲} = \frac{n \times k(N-k)(N-n)}{N^{۲}(N-۱)} \qquad (۲۱-۳)$$

در مثال فوق اندازه میانگین و واریانس برابر است با :

$$\mu = \frac{۶}{۱۰} \times ۵ = ۳$$

$$\sigma^{۲} = \frac{۵ \times ۶ \times (۱۰-۶) \times (۱۰-۵)}{۱۰۰ \times ۹} = \frac{۲}{۳}$$

برای روشن شدن بیشتر مفهوم توزیع فوق هندسی، به ذکر مثال به شرح زیرمی‌پردازیم:

در یک گروه ۱۵ نفره که ۵ نفر آنها دارای عینک می‌باشند، ۶ نفر را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه در نمونه انتخاب شده درست ۲ نفر عینک داشته باشند طبق رابطه (۳-۱۹) برابر است با:

$$p = \frac{C_{۵}^{۲} \times C_{۱۰}^{۴}}{C_{۱۵}^{۶}} = ۰/۴۲$$

در این مثال میانگین و واریانس تعداد افراد دارای عینک برابر است با:

$$\mu = \frac{۵}{۱۵} \times ۶ = ۲$$

$$\sigma^{۲} = \frac{۶ \times ۵ \times (۱۵-۵) \times (۱۵-۶)}{۱۵ \times ۱۵ \times ۱۴} = ۰/۸۶$$

تمرین

۱. جعبه‌ای شامل ده گلوله است به صورت زیر:

یک گلوله قرمز که روی آن عدد ۱ نوشته شده است

دو گلوله قرمز که روی هر یک عدد ۲ نوشته شده است

یک گلوله قرمز که روی آن عدد ۳ نوشته شده است

دو گلوله سفید که روی هر یک عدد ۱ نوشته شده است

یک گلوله سفید که روی آن عدد ۲ نوشته شده است

سه گلوله سفید که روی هر یک عدد ۳ نوشته شده است

اگر از این جعبه گلوله‌ای را به صورت تصادفی انتخاب کنیم، مطلوب است احتمال اینکه:

الف: گلوله خارج شده قرمز و روی آن عدد ۲ نوشته شده باشد.

ب: گلوله خارج شده قرمز باشد.

ج: روی گلوله خارج شده عدد ۲ یا ۳ نوشته شده باشد.

د: گلوله خارج شده قرمز یا روی آن عدد ۱ نوشته شده باشد.

۲. از ۲٤ گلوله مثال ۲ دو گلوله بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف. هر دو گلوله قرمز باشد.

ب. گلوله اول یک و گلوله دوم ۲ باشد.

ج. هر دو گلوله یکرنگ باشد.

د. یکی از گلوله‌ها سیاه و گلوله دیگر قرمز باشد.

هـ : مجموع اعداد روی دو گلوله ٤ باشد.

و: یکی از گلوله‌ها یک باشد در صورتیکه بدانیم هر دو گلوله خارج شده سیاه است.

۳. شخصی دارای سه فرزند ۱۷ ساله (A) ، ۱۹ ساله (B) و ۲۱ ساله (C) است. اگر احتمال مرگ در سنین فوق در طول سال به ترتیب برابر ۰/۰۰۳٦ ، ۰/۰۰۳۷ و ۰/۰۰۳۸ باشد به فرض مستقل بودن حوادث مطلوب است احتمال اینکه:

الف: فرزند A فوت کند و B و C زنده باشند.

ب: فرزندان A و B فوت کنند و C زنده باشد.

ج: فرزندان A و B و C هر سه زنده باشند.

د: اقلا یکی از سه فرزندان A ، B و C زنده باشند.

٤. اگر احتمال پسر یا دختر بودن نوزاد $\frac{1}{2}$ باشد، احتمال‌های زیر را درباره یک خانواده پنح اولادی محاسبه کنید:

الف: فرزند اول خانواده پسر باشد.

ب: کلیه فرزندان این خانواده پسر باشند.

ج: کلیه فرزندان این خانواده دختر باشند.

د: اقلاً دو فرزند این خانواده پسر باشند.

هـ : درست دو فرزند این خانواده پسر باشند.

و: حداکثر یک فرزند این خانواده دختر باشد.

ز: فرزند سوم این خانواده پسر باشد در صورتیکه فرزند اول و دوم دختر است.

۵. جعبه‌ای شامل یک گلوله سفید، ۳ گلوله سیاه و ٤ گلوله سبز است. از این جعبه دو گلوله خارج می‌کنیم مطلوب است احتمال اینکه:

الف: گلوله اول سفید و گلوله دوم سیاه باشد.

ب: یکی از گلوله‌ها سفید و گلوله دیگر سیاه باشد.

ج: هردو گلوله سبز باشد.

د: یکی سبز و دیگری سیاه باشد.

٦. از ٢٤ گلوله مثال ٢ یک گلوله بر می‌داریم. در صورت قرمز بودن گلوله احتمال ٤ بودن آن چقدر است؟

۷. گیریم جواب آزمایشی برای افراد مبتلا به نوعی سرطان با احتمال ۰/۹۷ و برای افرادی که به این نوع سرطان مبتلا نیستند با احتمال ۰/۰۵ مثبت باشد. چنانچه ۲ درصد بیماران در یک بیمارستان مبتلا به سرطان مورد بحث باشند و ازاین بیمارستان یک بیمار به طور تصادفی انتخاب شود، مطلوب است احتمال اینکه:

الف: جواب آزمایش برای این بیمار مثبت باشد.

ب: در صورتیکه جواب مثبت باشد، بیمار انتخاب شده واقعاً به این نوع سرطان مبتلا باشد.

۸. اگر احتمال مرگ در سال اول زندگی برابر ۰/۰۸ و احتمال مرگ برای کودک یکساله در فاصله یک تا پنج سالگی برابر ۰/۰٤ باشد، مطلوب است احتمال اینکه نوزادی که به صورت تصادفی انتخاب شده است:

الف: اقلا یک سال عمر کند.

ب: اقلا ۵ سال عمر کند.

ج: در فاصله یک تا پنج سالگی فوت کند.

۹. جعبه‌ای شامل ٦ بلیط است. ارزش دو بلیط هر یک برابر۵۰ ریال و ارزش چهار بلیط هر یک برابر ۱۰ ریال است. از این جعبه یک بلیط به تصادف خارج می‌کنیم. اگر ارزش بلیط خارج شده برد شخص محسوب گردد، امید ریاضی (میانگین) برد را در هر بار انتخاب محاسبه کنید. اگر همین شخص بجای یک بلیط دو بلیط بکشد، میانگین برد او را محاسبه کنید.

۱۰. تجربه نشان داده است که داروی معینی باعث بهبودی٤۰ درصد مبتلایان به یک بیماری می‌گردد. اگر داروی مورد نظر را روی پنج بیمار بکار بریم کلیه حالات را از نظر تعداد بیماران بهبود یافته در نظر گرفته و جدول توزیع احتمالهای آن را تشکیل دهید و براساس آن μ و σ^2 را محاسبه و درستی روابط (۳-۱۷) و (۳-۱۸) را تحقیق کنید.

۱۱. نسلی که از آمیزش دو خوکچه هندی زرد بدست می‌آید زرد (AA) و نسلی که از آمیزش دو خوکچه هندی سفید حاصل می‌گردد سفید (aa) و از آمیزش خوکچه هندی زرد و سفید نسل کرمی رنگ (Aa) و بالاخره از آمیزش دو خوکچه هندی کرمی رنگ احتمال سفید بودن

و زرد بودن هر یک برابر $\frac{1}{4}$ و احتمال کرمی بودن برابر $\frac{1}{2}$ است. براساس توضیحات فوق مطلوب است احتمال اینکه:

الف: ۳ نسل از ۱۰ نسلی که از آمیزش دو خوکچه هندی کرم، بدست می‌آید زرد باشد.

ب: اقلا ۳ نسل از ۱۰ نسل بالا سفید باشد.

۱۲. اگر تعداد ۱۰۰۰۰ باکتری در حجم ۲۰۰۰۰ سانتی‌متر مکعب مایعی به‌صورت مستقل و تصادفی پراکنده باشند، مطلوب است احتمال اینکه:

الف: در یک سانتمتر مکعب نمونه از این مایع اساساً میکروبی وجود نداشته باشد.

ب: در یک سانتیمتر مکعب این مایع حداکثر ۲ میکروب مشاهده شود.

۱۳. اگر احتمال بهبودی از بیماری خاصی برابر $\frac{1}{100}$ باشد، مطلوب است احتمال اینکه:

الف: از ده بیمای که به طور تصادفی انتخاب شده است یک نفر بهبود یابد.

ب: سوال الف را با استفاده ازتقریب پوآسون حل و دو نتیجه را با هم مقایسه کنید.

ج: از ۳۰۰ بیماری که به طور تصادفی انتخاب شده است حداقل ٤ نفر بهبود یابند (از توزیع پوآسون).

۱٤. شخصی سکه‌ای را دوبار پرتاب می‌کند اگر دو شیر ظاهر شود ٤۰ ریال و اگر یک شیر ظاهر شود ۲۰ ریال می‌برد و چنانچه هردو خط ظاهر شود ۷۰ ریال می‌بازد. میانگین مقدار برد این فرد را در هر بار انجام این آزمایش حساب کنید.

۱۵. به فرض اینکه احتمال متولد شدن در روزهای مختلف سال یکسان باشد، با استفاده از توزیع پوآسون احتمال اینکه از ۵۰۰ دانش آموز یک مدرسه درست ۲ نفر آنها در روز اول فروردین متولد شده باشند را حساب کنید.

۱٦. گیریم تعداد ذرات رادیو اکتیوی که از یک منبع رادیواکتیو خارج می‌گردد از توزیع پوآسون با میانگین ۲ ذره در یک ثانیه پیروی کند.

الف: مطلوب است احتمال اینکه در یک ثانیه حداکثر یک ذره خارج شود.

ب: میانگین ذرات خارج شده در یک ثانیه چقدر باشد تا احتمال قسمت الف برابر ۰/۹۰ گردد.

۱۷. اگر میانگین تعداد باکتریهای محلولی (حجم آن به اندازه کافی زیاد فرض می‌شود) برابـر ٤ باکتری در هر سانتیمتر مکعب و قرار گرفتن باکتریها در نقاط مختلف این محلول کاملا تصادفی باشد و از این محلول ده لوله آزمایش هر یک به حجم یک سانتیمتر مکعب نمونه تهیـه گـردد، مطلوب است احتمال اینکه:

الف: در هریک از این لوله‌ها حداقل یک باکتری موجود باشد (رشد باکتری صرفنظر گردد).

ب: درست در ۸ لوله حداقل یک باکتری موجود باشد (رشد باکتری صرفنظر گردد).

۱۸. شیوع یک بیماری غیر واگیر در جامعه برابر یک در هزار است. از این جامعه یک هزار نفـر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف: درست یک مورد از این بیماری مشاهده شود.

ب: حداقل یک مورد از این بیماری مشاهده شود

۱۹. فرض کنیم برای یک بیماری معین، از ۲۰ فردی که برای مطالعـه انتخـاب شـده‌انـد ۵ فـرد معین چه داروی مورد نظر محقق و چه دارونما دریافت کنند، بهبود می‌یابند. اگر این محقق ۲۰ فرد مورد نظر را به طور تصادفی به دو گروه تقسیم کرده و یک گروه را به عنوان گروه درمـانی مورد نظر و یک گروه را به عنوان گروه شاهد کـه دارونمـا دریافـت مـی‌کنـد در نظـر بگیریـد، مطلوب است احتمال اینکه به طور تصادفی:

الف: هر ۵ مورد که بهبود می‌یابند در گروه درمانی قرار بگیرند.

ب: هر ۵ مورد که بهبود می‌یابند در گروه شاهد قرار بگیرند.

ج: حداقل ٤ مورد بهبودی در گروه درمانی قرار بگیرند.

۲۰. احتمال تشخیص افسردگی در افراد مبتلا به افسردگی توسـط تسـت A برابـر۰/۹ اسـت و برای همین تسـت، احتمـال تشـخیص افسـردگی در افـراد غیـرمبتلا برابـر ۰/۲ اسـت. اگـر در جامعه‌ای ۳۰ درصد دارای افسردگی باشند و یک نفر به طور تصادفی انتخاب شود، اولاً احتمال آنکه تست A او را افسرده تشخیص دهد چقدر است؟ و ثانیاً با فرض مثبـت بـودن تسـت A ، احتمال مبتلا بودن این فرد به افسردگی چقدر است؟

۲۱. اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم ۰/۳ = p (A) و $P(AB)=$ ۰/۱۲ باشد، $p(A+B)$ را محاسبه کنید.

۲۲. کلاس مدرسه‌ای دارای ۵۰ دانش آموز است. از این دانش آموزان ۱۰ نفر دارای عیب انکسار چشم و ۵ نفر چاق می‌باشند که دو تن از دانش آموزان فوق دارای هر دو عیب انکسار چشم و چاقی هستند. از این کلاس ۵ نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف: ٤ نفر از آنها فاقد هر دو اختلال فوق باشند.

ب: ۲ نفر فقط دارای عیب انکسار، ۱ نفر فقط دارای اختلال چاقی و ۱ نفر دارای هر دو اختلال باشند.

ج: ۲ نفر فقط دارای عیب انکسار چشم، ۲ نفر فقط دارای اختلال چاقی و ۱ نفر دارای هر دو اختلال باشند.

۲۳. در توزیع دو جمله‌ای با پارامتر n و p نسبت موفقیت در n آزمایش:

الف: کمیتی تصادفی است که می تواند از یک آزمایش به آزمایش دیگر تغییر کند.

ب: به تعداد موفقیت بستگی ندارد.

ج: همواره ثابت است.

د: به تعداد عدم موفقیت بستگی ندارد.

۲٤. اگر $P(A) = ۰/۲$ و $P(A+B) = ۰/٤$ و A و B دو پیشامد مستقل باشند $P(B)$ برابر است با :

الف) ۰/۲ ب) ۰/۲۵

ج) ۰/۳ د) ۰/۱۵

۲۵. مراجعین به اورژانس یک بیمارستان دارای توزیع پواسن با میانگین ۲ نفر در روز است احتمال اینکه در یک روز هیچ بیمار مراجعه نکند برابر است با :

الف) $۱ - e^{-۲}$ ب) $۲e^{-۲}$

ج) $۱ - ۲e^{-۲}$ د) $e^{-۲}$

۲٦. احتمال اینکه قد سه نوزاد که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند هر سه کمتر از میانه جامعه باشد برابر است با :

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۱}{٤}$

ج) $\frac{۳}{۸}$ د) $\frac{۱}{۸}$

۲۷. احتمال اینکه اقلا یکی از سه نوزاد که به طور تصادفی انتخاب شده وزنش زیر صدک دهم باشد برابر است با :

الف) ۰/۰۰۱ ب) ۰/۹۹۹

ج) ۰/۷۲۹ د) ۰/۲۷۱

۲۸. ۵۰ درصد کارکنان یک بیمارستان بزرگ از ساعت کار جدید بیمارستان ناراضی هستند اگر ٤ نفر از کارکنان این بیمارستان را به صورت تصادفی انتخاب کنیم. احتمال اینکه ۲ نفر آنها ناراضی باشند تقریبا برابر است با :

الف) ۱ ب). $\frac{۱}{۱٦}$

ج) $\frac{٤}{۱٦}$ د) $\frac{٦}{۱٦}$

۲۹. فرض کنید A و B دو پیشامد مستقل به ترتیب با احتمالهای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ باشند P(A+B) برابر است با :

الف) $\frac{۲}{۳}$ ب) $\frac{۳}{٤}$

ج) $\frac{٤}{۵}$ د) $\frac{۵}{٦}$

۳۰. اگر B و A دو حادثه ناسازگار با احتمالهای غیر صفر باشند آنگاه این دو حادثه:

الف) همواره مستقل از هم هستند.

ب) همواره به هم وابسته‌اند.

ج) در صورتی از هم مستقلند که احتمال آنها با هم برابر باشند.

د) در صورتی از هم مستقلند که احتمال آنها با هم برابر نباشند.

۳۱. احتمال تولد فرزند ناهنجار در یک خانواده $\frac{۱}{۱۰۰}$ است احتمال تقریبی اینکه از ۳ زایمان خانواده، هیچکدام از نوزادان دچار ناهنجاری نباشند برابر است با :

الف) ۰/۹۵ ب) ۰/۹۷

ج) ۰/۰۳ د) ۰/۰۱۰

۳۲. A و B دو پیشامد تصادفی‌اند و P(A) احتمال وقوع پیشامد A است اگر P(A) = ۰/۰۵ و P(B/A) = ۰/۹۰ آنگاه P(AB) برابر است با :

الف) $\frac{۱}{۱۸}$ ب) ۰/۰۴۵

ج) ۰/۸۵ د) ۰/۹۵

۳۳. در یک توزیع پوآسن با میانگین λ اگر احتمال صفر را با P(۰) و احتمال یک را با P(۱) نشان دهیم می‌توان گفت:

الف) همواره P(۱) > P(۰) ب) همواره P(۱) < P(۰)

ج) همواره P(۱) = P(۰) د) رابطه P(۰) و P(۱) به مقدار λ بستگی دارد.

۳٤. وقتی تعداد سوالهای آزمون ٥ برابر می‌شود انحراف استاندارد تعداد جواب صحیح:

الف) ۲٥ برابر می‌شود ب) تغییر نمی‌کند

ج) ٥ برابر می‌شود د) $\sqrt{۵}$ برابر می‌شود

۳٥. در یک آزمایش انگلی احتمال تشخیص بیماری در هر بار آزمایش ٥۰ درصد است. احتمال اینکه در سه بار آزمایش از یک فرد مبتلا بتوان به نتیجه صحیح (تشخیص مبتلا بودن) رسید، برابر است با:

الف) $\frac{۳}{٤}$ ب) $\frac{٤}{٥}$

ج) $\frac{۷}{۸}$ د) $\frac{۹}{۱۰}$

۳٦. از یک خانواده ٤ نفره که ۲ نفر آنها مرد و ۲ نفر آنها زن هستند نمونه ای تصادفی به حجم ۲ بدون جایگذاری انتخاب می کنیم احتمال اینکه ۲ نفر انتخاب شده یکی مرد و دیگری زن باشد برابر است با:

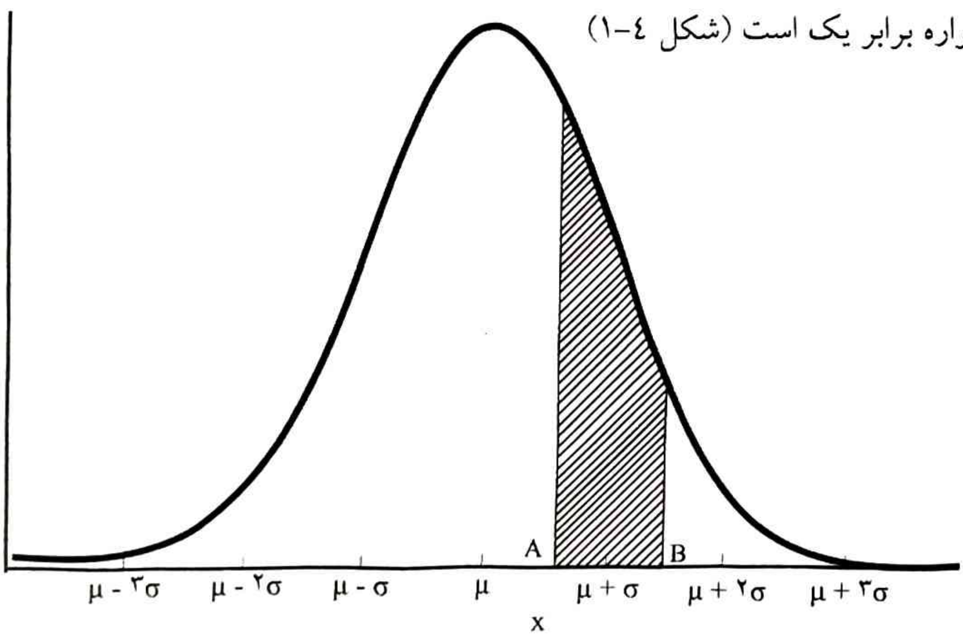
الف) $\frac{۳}{٤}$ ب) $\frac{۱}{۳}$

ج) $\frac{۲}{۳}$ د) $\frac{۱}{۲}$

فصل چهارم
توزیع نرمال

٤-١. مقدمه

یکی از مهم‌ترین توزیع‌های فراوانی، (برای کمیت پیوسته و همچنین به طور کلی) توزیع نرمال است. اهمیت این توزیع نه تنها از این نظر است که در طبیعت بسیاری از صفات تقریباً دارای توزیع نرمال می‌باشند، بلکه بسیاری از روشهای آماری که در فصول بعدی این کتاب عرضه می‌گردد، براساس این توزیع است و حتی پاسخ بسیاری از مسائل عملی آمار بر پایه فرض نرمال بودن توزیع جامعه، آسان‌تر و یا اصولاً امکان‌پذیر می‌گردد. شکل ظاهری این توزیع زنگی شکل و متقارن است و دامنه تغییرات آن از منهای بینهایت تا بعلاوه بینهایت ادامه دارد و مانند هر منحنی توزیع دیگری سطح زیر منحنی نرمال بین دو مقدار صفت، معرف فراوانی نسبی و یا به عبارت دیگر، احتمال اینکه متغیر مورد مطالعه در این فاصله قرار گیرد می‌باشد و در نتیجه سطح کل زیر منحنی همواره برابر یک است (شکل ٤-١)



شکل ٤-١. نمای کلی یک توزیع نرمال

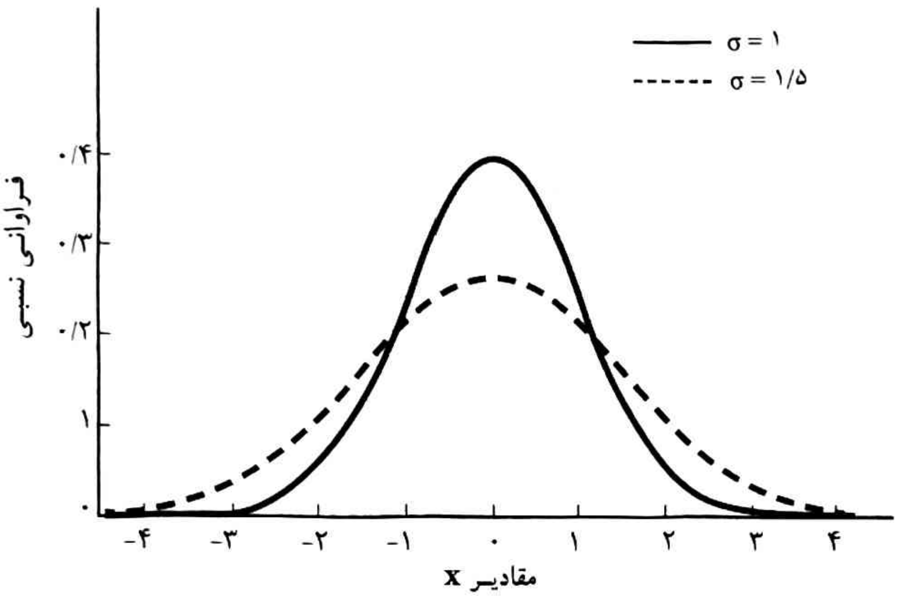
٤-٢. معادله توزیع نرمال

معادله توزیع نرمال به صورت زیر است:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (١-٤)$$

که در آن π و e به ترتیب ثابتهایی با مقادیر تقریبی ٣/١٤١٦ و ٢/٧١٨٣ است و μ و σ دو پارامتر توزیع می‌باشند. کمیت x که روی محور افقی نمایش داده می‌شود معرف کمیت تصادفی مورد نظر و کمیت y که عرض منحنی برای x متناظر آن را نشان می‌دهد، بیان کننده فراوانی نسبی برای واحد فاصله در حول نقطه x است. همانطور که قبلا ذکر شد سطحی که در فاصله این منحنی و محور طول قرار دارد برابر یک واحد مربع و سطحی که بین دو نقطه A و B قرار دارد برابر فراوانی نسبی مقداری از صفت که در فاصله این دو نقطه قرار دارد می‌باشد.

از معادله توزیع نرمال استنباط می‌شود که این منحنی تنها دارای دو پارامتر μ و σ است. به عبارت دیگر با در دست داشتن این دو پارامتر می‌توان احتمال و یا فراوانی نسبی بین هر دو مقدار از متغیر x را محاسبه نمود. معمولاً برای سهولت کار از بیان کامل توزیع نرمال خودداری کرده و تنها به ذکر میانگین و انحراف معیار توزیع اکتفا می‌کنند و به صورت $N(\mu$ و $\sigma)$ می‌نویسند. بدیهی است که هر قدر انحراف معیار توزیعی کمتر باشد، تمرکز سطح زیر منحنی بیشتر در اطراف میانگین خواهد بود. شکل ٤-٢ نمایشگر توزیع نرمال با میانگین‌های مساوی ولی با انحراف معیارهای نامساوی است. چنانچه ملاحظه می‌گردد سطحی که در فاصله ١- تا ١ قرار دارد قسمت اعظم سطح زیر منحنی پر را شامل گردیده است در حالی که در منحنی نقطه چین این قسمت چندان زیاد نمی‌باشد.

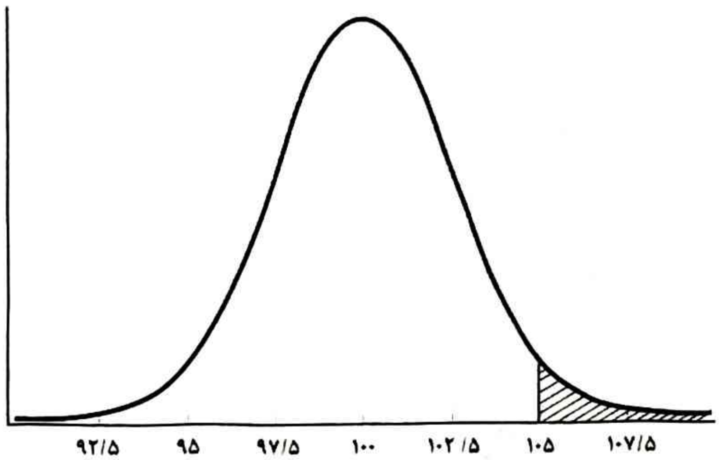


شکل ٤-۲. نمای دو منحنی نرمال با میانگین مساوی و انحراف معیارهای نامساوی

٤-۳. محاسبه سطح زیرمنحنی نرمال

از مطالب قسمت ٤-۲ نتیجه می‌شود که اگر توزیع مقدار قند خون افراد جامعه‌ای نرمال (البته کرانه‌های این منحنی تا بی‌نهایت ادامه نخواهد داشت ولی چون سطح ناچیزی از منحنی به دو انتهای آن تعلق دارد، فرض نرمال بودن توزیع اشکالی ایجاد نخواهد کرد) با میانگین ۱۰۰ و انحراف معیار ۲/۵ سانتی‌گرم در لیتر باشد (شکل ٤-۳) و ما بخواهیم این احتمال را که قند خون یک نفر از ۱۰۵ سانتی گرم در لیتر به بالا باشد بدست آوریم، باید به محاسبه سطحی از منحنی که در فاصله ۱۰۵ و بی‌نهایت قرار دارد بپردازیم. این کار مستلزم انتگرال گیری از منحنی فوق در فاصله ۱۰۵ تا بی‌نهایت است که کار نسبتاً مشکلی است، به‌خصوص که پارامترهای توزیع نرمال، بسته به اندازه‌های صفت مورد مطالعه، متغیر بوده و در نتیجه بایستی سطح زیر منحنی را برای فواصل مختلف در منحنی‌های نرمال با پارامترهای متفاوت محاسبه نمود. به منظور رفع مشکل فوق، متغیر x_i را آنچنان تغییر می‌دهیم که علیرغم یکسان نبودن μ و σ در توزیع‌های مختلف، نتیجه به توزیع واحدی که آن را توزیع نرمال استاندارد می‌نامیم، منجر گردد. بدین منظور از مقادیر x_i عدد ثابت μ را کم و جواب را بر عدد ثابت σ تقسیم می‌کنیم و متغیر جدید را z_i می‌نامیم:

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \qquad (٤-۲)$$

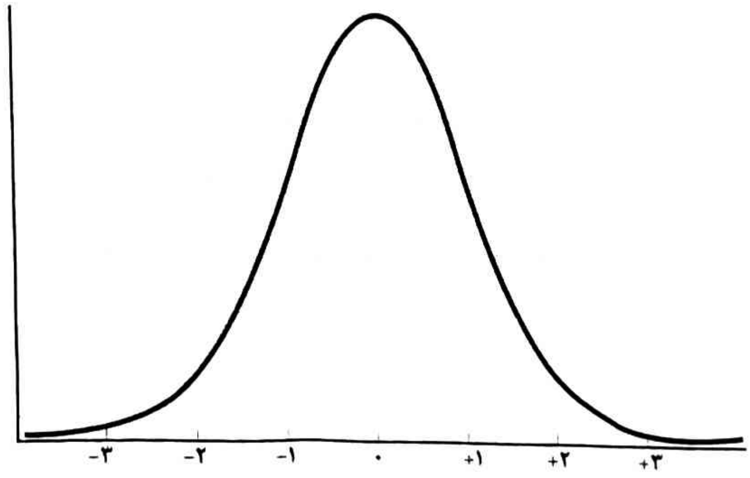


۴-۳. نمای یک منحنی نرمال با میانگین ۱۰۰ و انحراف معیار ۲/۵

براساس مطالب قسمت ۲-۴، چون در فرمول (۴-۲) از مقادیر x_i عدد ثابت μ کم شده است، بنابراین میانگین مقادیر z_i هم به اندازه μ از میانگین مقادیر x_i یعنی μ کمتر خواهد شد و میانگین متغیر جدید، z_i ، صفر می‌شود، ولی این تغییر در انحراف معیار تاثیری نمی‌گذارد. از طرف دیگر چون μ - x_i را σ برابرکوچک کرده‌ایم. بنابراین انحراف معیار z_i هم σ برابر نسبت به انحراف معیار x_i یعنی σ کوچکتر و برابر یک خواهد شد. چون تغییر متغیری که روی کمیت تصادفی x_i انجام شده است از نوع خطی می‌باشد براساس خواص توزیع نرمال متغیر جدید، z_i ، نیز دارای توزیع نرمال بوده و میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب برابر صفر و یک خواهد شد و معادله آن با توجه به رابطه (۴-۱) بصورت زیر می‌باشد:

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad (۴-۳)$$

که با (۱ و ۰)N نشان می‌دهیم. شکل(۴-۴) نمایشگر توزیع نرمال استاندارد است.

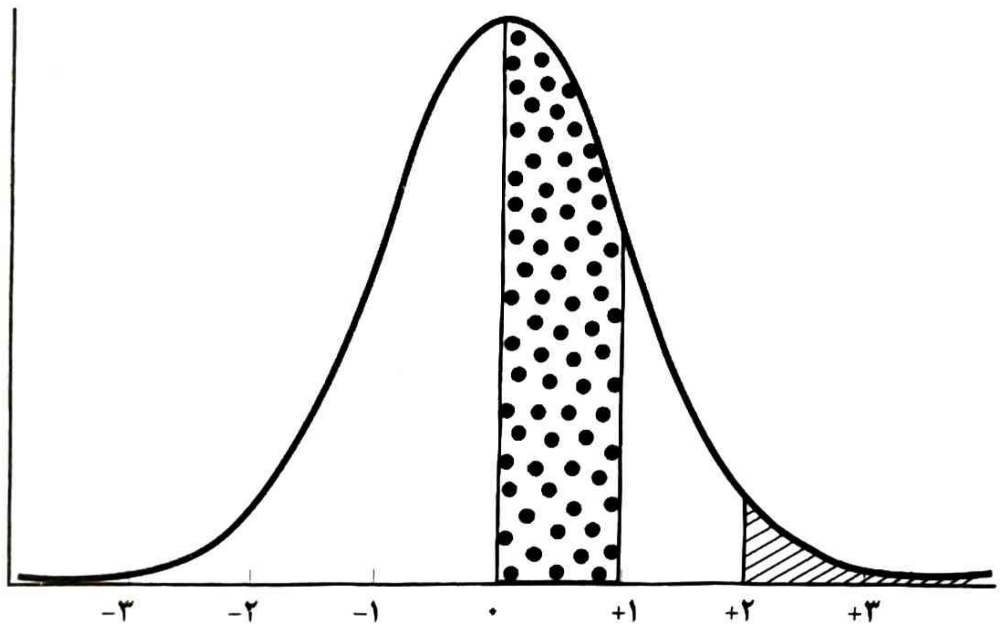


شکل ۴-۴. نمای توزیع نرمال استاندارد

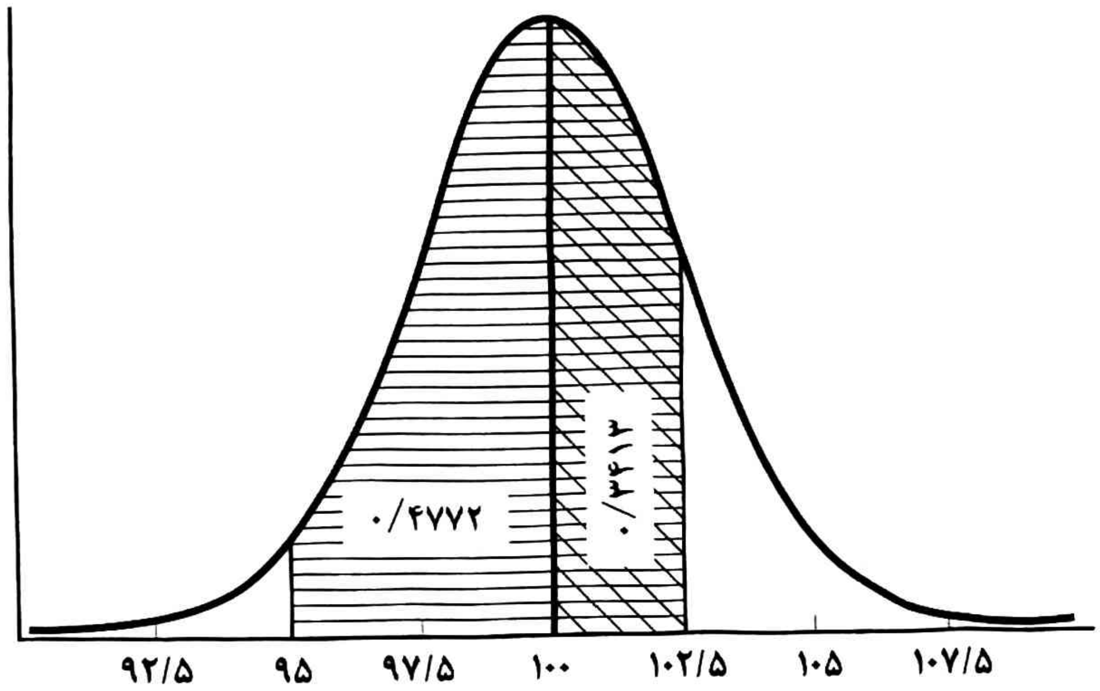
از آنجا که می‌توان با تغییر متغیر کلیه توزیع‌های نرمال را به توزیع نرمال استاندارد تبدیل کرد، بنابراین کافی است که سطح زیر منحنی را برای فواصل مختلف تنها برای توزیع نرمال استاندارد محاسبه نمود و آنگاه با انجام محاسبات ساده‌ای سطح زیر هر منحنی نرمال را در هر فاصله دلخواه بدست آورد. مثلا اگر کمیت x_i دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد و بخواهیم احتمال اینکه این کمیت مقدار خود را در فاصله X_1 تا X_2 انتخاب کند محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$P(X_1 < X < X_2) = p(z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} < z = \frac{X - \mu}{\sigma} < z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma})$$

جدول شماره IV گویای سطح زیر منحنی توزیع نرمال استاندارد در فاصله میانگین (صفر) تا مقادیر مختلف z است که براساس انتگرال گیری رابطه ۴-۳ محاسبه شده است. از جدول IV نتیجه می‌شود که مثلا سطح زیر منحنی نرمال استاندارد در فاصله ۰ = z تا ۱ = z برابر ۰/۳۴۱۳ است و یا در فاصله ۲ تا بی‌نهایت برابر ۰/۰۲۲۸ = ۰/۴۷۷۲ − ۰/۵ است (شکل ۴-۵).



شکل ۴-۵



شکل ٤-٦

بدین ترتیب اگر بخواهیم در شکل ٤-٣ سطحی از منحنی توزیع قند خون را که در فاصله ۹۵ تا ۱۰۲/۵ قرار دارد محاسبه نماییم لازم است ابتدا این اندازه‌ها را با استفاده از فرمول (٤-٢) به z تبدیل کرده و آنگاه براساس z حاصل و با استفاده از جدول IV سطح معادل آن را در توزیع نرمال استاندارد بصورت زیر محاسبه کنیم:

$$z_۱ = \frac{۹۵ - ۱۰۰}{۲/۵} = -۲$$

$$z_۱ = \frac{۱۰۲/۵ - ۱۰۰}{۲/۵} = ۱$$

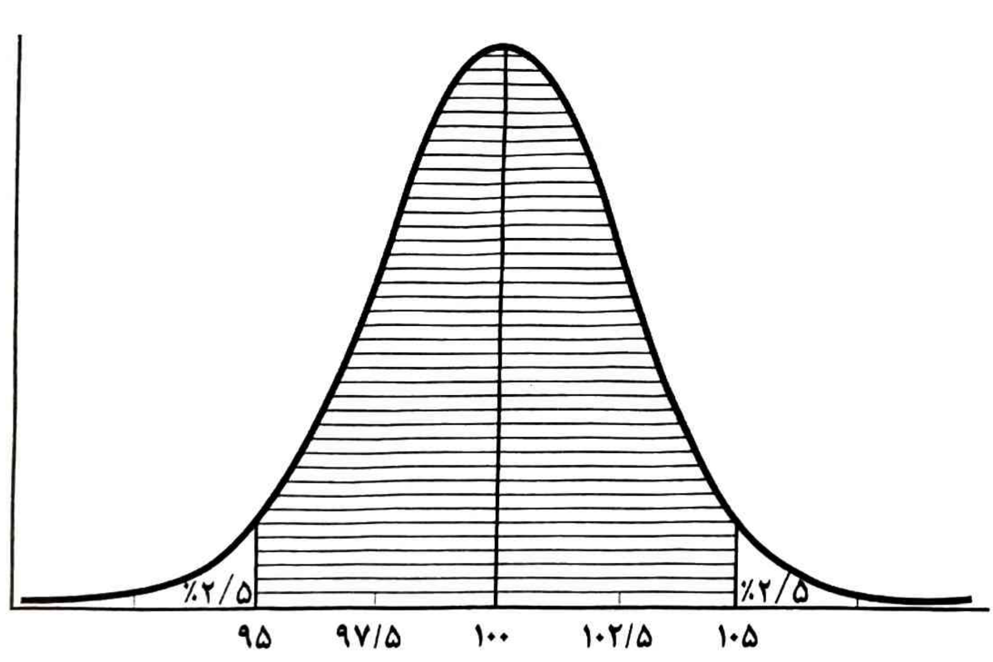
(علامت منها معرف این است که سطح مورد نظر در طرف چپ، میانگین قرار دارد). سطحی که در شکل (٤-٦) در فاصله ۹۵ تا ۱۰۰ قرار دارد برابر سطحی است که در توزیع نرمال استاندارد در فاصله ۲- تا صفر قرار دارد که خود با سطح صفر تا ۲ برابر است (۰/٤۷۷۲). به همین ترتیب سطحی که در فاصله ۱۰۰ تا ۱۰۲/۵ قرار دارد با سطحی که در فاصله صفر تا یک است مساوی می‌باشد. (۰/۳٤۱۳) و بالاخره سطحی که در فاصله ۹۵ تا ۱۰۲/۵ قرار دارد برابر مجموع سطوح فوق می‌گردد

(۰/۸۱۸۵). به عبارت دیگر احتمال اینکه قند خون فردی از جامعه مورد مطالعه در فاصله ۹۵ تا ۱۰۲/۵ سانتی‌گرم در لیتر باشد مساوی ۰/۸۱۸۵ است. در مثال فوق اگر بخواهیم احتمال اینکه قند خون فردی از ۹۲/۵ سانتی‌گرم در لیتر کمتر باشد محاسبه نماییم به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$z_۱ = \frac{۹۲/۵ - ۱۰۰}{۲/۵} = -۳$$

سطحی که در توزیع نرمال استاندارد در فاصله ۳- تا صفر قرار دارد برابر ۰/٤۹۸۷ است، بنابراین سطحی که در فاصله منهای بی‌نهایت تا ۳- قرار دارد (طرف چپ نقطه ۳-) برابر ۰/۰۰۱۳ = ۰/٤۹۸۷ − ۰/۵۰ خواهد شد. بدین ترتیب احتمال اینکه قند خون فردی از ۹۲/۵ سانتی‌گرم در لیتر کمتر باشد مسای ۰/۰۰۱۳ است. جدول شماره IV گویای این مطلب است که در کلیه توزیع‌های نرمال سطح زیر منحنی در فاصله $\mu \pm ۱\sigma$ تقریباً برابر ۰/٦۸۲٦ و در فاصله $\mu \pm ۲\sigma$ تقریباً برابر ۰/۹۵٤٤ در فاصله $\mu \pm ۲/۵\sigma$ تقریباً برابر ۰/۹۸۷٦ و در فاصله $\mu \pm ۳\sigma$ تقریباً برابر ۰/۹۹۷٤ است.

از آنجا که توزیع بیشتر اندازه‌های بیولوژی مثل قند خون، هموگلوبین خون، کلسترول خون، طول قد، وزن بدن، اندازه قلب و غیره تقریباً نرمال است در پزشکی $\mu \pm ۲\sigma$ را به عنوان حد نرمال یک اندازه می‌شناسند. مثلا در مثال قند خون (۲/۵) ۲ ± ۱۰۰ یعنی فاصله ۹۵ تا ۱۰۵ را حد نرمال می‌دانیم، زیرا قند خون حدود ۹۵ درصد افراد در این فاصله قرار دارد (شکل ٤-۷).



شکل ٤-۷

تمرین

۱. چه سطحی از منحنی نرمال در هر یک از دو فاصله زیر قرار می‌گیرد؟

الف) $\mu \pm ۱/۵\,\sigma$

ب) $\mu - ۱/۸\,\sigma$ تا $\mu + ۱/۵\sigma$

ج) $\mu + ۱/۵\,\sigma$ تا $\mu + ۱/۸\sigma$

د) $\mu - ۱/۵\,\sigma$ تا $\mu - ۱/۲\sigma$

۲. در یک توزیع نرمال میانگین و انحراف معیار به ترتیب برابر ۴۰ و ۵ است. مطلوبست:

الف) سطحی از منحنی که در طرف چپ نقطه ۳۴ قرار دارد.

ب) سطحی از منحنی که در فاصله ۳۴ و ۴۶ قرار دارد.

ج) سطحی از منحنی که در فاصله ۴۰ تا ۵۰ قرار دارد.

د) سطحی از منحنی که در طرف راست نقطه ۴۸ قرار دارد.

هـ) نقطه‌ای که ۹۵ درصد سطح منحنی در طرف چپ آن قرار دارد.

و) دو نقطه‌ای که نسبت به میانگین متقارن بوده و ۹۰ درصد سطح منحنی در این فاصله قرار دارد.

۳. اگر توزیع طول قد جامعه‌ای با میانگین ۱۷۲/۵ سانتیمتر و انحراف معیار ۷/۵ سانتیمتر نرمال باشد طول قد چه نسبتی از جامعه:

الف) در فاصله ۱۶۵ تا ۱۸۰ سانتیمتر قرار دارد.

ب) کوتاهتر از ۱۵۷/۵ سانتیمتر است.

ج) بلندتر از ۱۸۸ سانتیمتر است.

٤. از یک توزیع نرمال نمونه‌ای به حجم ۳ انتخاب می‌کنیم. عدد کوچکتر را با a و عدد بزرگتر را با b نشان می‌دهیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) b کوچکتر از میانگین باشد.

ب) a کوچکتر از میانگین باشد.

ج) فاصله a تا b میانگین را شامل شود.

۵. در یک توزیع نرمال نسبت افرادی که در فاصله یک انحراف معیار از میانگین قرار دارند تقریباً برابر است با :

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۳}$

ج) $\frac{۲}{۳}$ د) $\frac{۳}{٤}$

٦. اگر توزیع قد نوزادان نرمال با میانگین ۵۰ و انحراف معیار ۱/۵ سانتیمتر باشد. آن‌گاه درصد نوزادان با قد کمتر از ٤۷ سانتیمتر برابر است با :

الف) ۵ ب) ۹۷/۵

ج) ۱ د) ۲/۵

۷. سه نوزاد به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه اقلاً وزن یکی از آنها کمتر از میانه باشد برابر است با :

الف) $\frac{۳}{۸}$ ب) $\frac{۷}{۸}$

ج) $\frac{۱}{۸}$ د) $\frac{۵}{۸}$

فصل پنجم
برآورد[1]

۵-۱. مقدمه (سرشماری[2] و نمونه‌گیری[3])

واژه سرشماری به روشی از مطالعه آماری اطلاق می‌شود که در آن کلیه افراد جامعه از نظر یک یا چند صفت مورد مطالعه قرار می‌گیرند. بدیهی است در بسیاری از موارد حجم جامعه مورد مطالعه بسیار بزرگ و حتی نامحدود است و در نتیجه انجام سرشماری مشکل و یا غیرممکن می‌گردد، مشکل از این نظر که سرشماری مستلزم بکار گرفتن هزینه سنگین و وقت زیاد است و به علاوه بدلیل ابعاد گسترده کار، کنترل، صحت و دقت عملیات به نحو مطلوب امکان‌پذیر نمی‌باشد و غیر ممکن از این نظر که در پاره‌ای از بررسی‌ها تکنیک مطالعه موجب انهدام و یا از دست رفتن خاصیت فرد یا شی مورد مطالعه می‌گردد و در نتیجه استفاده از روش سرشماری به هیچ وجه معقول نخواهد بود. مثلاً در مطالعه مقدار قند خون یک بیمار همیشه به بررسی نمونه‌ای از خون بیمار (چند سانتی متر مکعب) مبادرت می‌شود و هرگز در این مطالعه از روش سرشماری (آزمایش تمام خون بیمار) استفاده نمی‌گردد. بدلیل مشکلات فوق تقریباً در همه موارد بجای سرشماری به مطالعه نمونه‌ای از جامعه اقدام می‌گردد. بدیهی است در تعیین حجم نمونه و نحوه انتخاب آن باید از روشهایی استفاده شود که نمونه حاصل بتواند بخوبی معرف جامعه خود بوده و با حداقل هزینه ممکن، دقت مورد نظر را تأمین نماید، چه هدف از نمونه‌گیری مطالعه نمونه و از آنجا قضاوت درباره جامعه با درجه اطمینان مطلوبی می‌باشد. چنانچه در روش انتخاب نمونه و اندازه آن دقت کافی بکار نرود، ممکن است نتایج نمونه‌گیری به جامعه مورد مطالعه قابل تعمیم نبوده و یا دارای دقت مورد نظر نباشد.

---

1. Estimation
2. Census
3. Sampling

روشهای انتخاب نمونه را می‌توان به دو گروه تصادفی و غیرتصادفی تقسیم نمود. در روش تصادفی این امکان وجود دارد که براساس نتایج حاصل از نمونه با اعتماد قابل اندازه‌گیری درباره پارامترهای جامعه قضاوت کرد، در صورتی که نمونه‌گیری غیرتصادفی فاقد این خاصیت است. انتخاب نمونه در نمونه‌گیری غیرتصادفی براساس تشخیص و صلاح محقق انجام می‌گیرد، نه براساس تصادف و احتمال تعیین شده قبلی، و در نتیجه نمی‌توان از قواعد و قوانین مورد بحث در این کتاب برای تعمیم نتایج نمونه‌گیری به جامعه استفاده کرد.

نمونه‌گیری تصادفی ممکن است با روش‌های مختلفی انجام پذیرد ولی در این کتاب تنها یکی از انواع نمونه‌گیری تصادفی که نمونه‌گیری تصادفی ساده[1] نامیده می‌شود مورد بحث قرار می‌گیرد[2].

۵-۲. نمونه‌گیری تصادفی ساده

در نمونه‌گیری تصادفی ساده شانس انتخاب هر فرد در هر مرحله از انتخاب نمونه برای کلیه افراد باقیمانده مساوی و مستقل از هم می‌باشد. اگر فرد انتخاب شده مجدداً در معرض انتخاب قرار گیرد نمونه‌گیری را با جایگذاری نامند، در این صورت ممکن است یک فرد چند بار در نمونه تکرار شود. نکته قابل ذکر اینکه به هنگام نمونه‌گیری با جایگذاری اگر حجم جامعه (N) محدود و کوچک هم باشد بدلیل برگرداندن افراد انتخاب شده در واقع حجم جامعه نامحدود می‌گردد. به عبارت دیگر مثلاً در قرعه کشی اعداد ۰ تا ۹ هر یک از اعداد ۰ تا ۹ می‌تواند بی‌نهایت بار تکرار شود. اگر فرد انتخاب شده مجدداً در معرض انتخاب قرار نگیرد و یا به عبارت دیگر یک فرد تنها بتواند یک بار در نمونه ظاهر شود نمونه‌گیری را بدون جایگذاری گویند. مطالب مورد بحث در این کتاب بر این اساس است که یا نمونه‌گیری با جایگذاری انجام می‌شود و یا اگر بدون جایگذاری انجام گیرد جامعه مورد مطالعه نامحدود است. عملاً وقتی حجم نمونه از ۵ درصد حجم جامعه کمتر باشد جامعه را نامحدود تلقی می‌کنند.

بعد از این برای سهولت بیان، اغلب این نمونه‌گیری را نمونه‌گیری تصادفی می‌نامیم و از ذکر کلمه ساده خودداری می‌کنیم.

اینک گیریم جامعه مورد مطالعه، دانش آموزان دبیرستانی باشند که شامل ۲۰۰۰ دانش آموز است (N = ۲۰۰۰) می‌خواهیم براساس نمونه‌گیری تصادفی نمونه‌ای از دانش آموزان این دبیرستان

1. Simple random sampling

۲. برای اطلاع از سایر روشهای نمونه‌گیری به کتابهای مربوط به روشهای نمونه‌گیری از جمله کتاب Sampling Techniques تالیف W.G.Cochran مراجعه گردد.

مثلا ۵۰ نفر را $(n = ۵۰)$ از نظر وزن بدن و یا عیوب دید چشم مورد مطالعه قرار دهیم، تا از آنجا بتوان درباره میانگین وزن بدن و یا نسبت دانش آموزان مبتلا به عیب دید در این جامعه قضاوت کرد. در این دبیرستان می‌توان با توجه به دفتر ثبت نام دانش آموزان شماره ترتیب یکایک دانش آموزان را روی مقواهای یک شکل و یک اندازه نوشت و آنها را در جعبه‌ای ریخت و آنگاه پس از اختلاط کامل تعداد ۵۰ مقوا را از جعبه خارج نمود و با توجه به شماره‌های خارج شده دانش آموزان انتخاب شده را از نظر وزن بدن و دید چشم مورد مطالعه قرار دارد. گرچه در مثال مورد بحث انجام این عمل چندان مشکل نمی‌باشد ولی اگر حجم جامعه بزرگتر باشد (که معمولا چنین است) اولاً انجام عملیات فوق بسیار وقت‌گیر بوده و در ثانی اختلاط کامل مقواها به دلیل زیاد بودن آنها بخوبی انجام نمی‌گیرد واساساً ممکن است تعدادی از مقواها در مقایسه با سایر مقواها شانس بیشتر یا کمتری برای انتخاب شدن داشته باشند.

به منظور سهولت کار و همچنین ایجاد شرایط کاملاً یکسان به هنگام انتخاب نمونه‌ها، از جدولی به نام جدول اعداد تصادفی استفاده می‌شود که نمونه آن تحت عنوان جدول III در ضمیمه کتاب موجود است. در این کتاب تنها به ارائه چهار صفحه از جدول اعداد تصادفی اکتفا شده است. در صورت نیاز می‌توان صفحات بیشتر جدول اعداد تصادفی را در سایر کتابهای آمار جستجو نمود.

در این صورت با توجه به تعریف آماری احتمال (قسمت ۳-۶) تقریباً فراوانی اعداد ۰ تا ۹ با یکدیگر مساوی می‌باشد (فراوانی نسبی هر عدد برابر $\frac{۱}{۱۰}$ است) اعداد این جدول را می‌توان برحسب احتیاج یک رقمی (از ۰ تا ۹) دو رقمی (از ۰۰ تا ۹۹) سه رقمی از (۰۰۰ تا ۹۹۹) و یا بیشتر استفاده نمود.

روش استفاده از جدول بدین ترتیب است که به طور تصادفی از نقطه‌ای از جدول شروع بخواندن و یادداشت کردن اعداد می‌کنیم تا تعداد نمونه مورد نظر تامین گردد. باید تعداد ارقام اعداد تصادفی که در جدول خوانده می‌شود با تعداد ارقام شماره آخرین فرد از جامعه مساوی باشد.

در مثال انتخاب ۵۰ دانش آموز از دبیرستان ۲۰۰۰ نفری لازم است اعداد جدول را چهار رقمی بخوانیم، زیرا شماره دانش آموزان دبیرستان از عدد ۰۰۰۰ شروع و به عدد ۱۹۹۹ ختم می‌شود، و یا به عبارت دیگر شماره آخرین دانش آموز دبیرستان چهار رقمی است. خواندن اعداد چهار رقمی تا انتخاب ۵۰ دانش آموز ادامه می‌یابد. بدیهی است در صورتیکه نمونه‌گیری بدون جاگذاری باشد از یادداشت کردن اعداد تکرای خودداری می‌شود. در انتخاب این اعداد تصادفی ممکن است به اعداد

چهار رقمی برخورد کنیم که اولین رقم سمت چپ آنها ۲ و یا بزرگتر از ۲ باشد در این صورت می‌توان این اعداد را نادیده گرفت و آن قدر نمونه‌گیری را ادامه داد تا ۵۰ عدد تصادفی بین ۰۰۰۰ تا ۱۹۹۹ حاصل شود، ولی این عمل وقت گیر است و مستلزم انتخاب تعداد زیادی اعداد تصادفی می‌باشد. برای سهولت کار ممکن است در این مثال اعداد سمت چپ را برحسب اینکه زوج یا فرد باشند صفر یا یک تلقی کرد که در نتیجه کلیه اعداد چهار رقمی برای مثال فوق قابل استفاده خواهند بود. در سایر موارد هم می‌توان با اتخاذ تدابیر مشابهی از اتلاف وقت و از دست دادن اعداد تصادفی جلوگیری کرد.

۵-۳. برآورد نقطه‌ای[1] میانگین و توزیع میانگین‌های حاصل از نمونه‌گیری

جامعه‌ای به حجم ۳ = N با اندازه‌های ۳۷، ۲۵، ۷ (مثلا سن پدر، مادر و فرزند) در نظر می‌گیریم. در این جامعه میانگین و واریانس صفت مورد مطالعه برابر است با :

$$\mu = \frac{۷ + ۲۵ + ۳۷}{۳}$$

$$\mu = ۲۳$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۲۵ - ۲۳)^۲ + (۳۷ - ۲۳)^۲ + (۷ - ۲۳)^۲}{۳}$$

$$\sigma^۲ = ۱۵۲$$

حال برای این جامعه کلیه نمونه‌های دوتایی با جایگذاری را (از این نظر که جامعه مورد مطالعه نامحدود تقلی شود) در نظر می‌گیریم که در ستون سمت راست جدول ۵-۱ نشان داده شده است. واضح است که در نمونه‌گیری تصادفی احتمال انتخاب هر یک از این حالات مساوی و برابر $\frac{۱}{۹}$ خواهد شد. طبیعی‌ترین برآوردی که می‌توان توسط نمونه جهت میانگین جامعه ارائه داد همان میانگین نمونه است که برای نمایش آن از $\overline{X}$ (ایکس بار) استفاده می‌شود و آن را برآورد نقطه‌ای از میانگین جامعه می‌گویند. در مثال مورد بحث مقدار $\overline{X}$ برای نمونه اول مساوی ۲۵، برای نمونه دوم مساوی ۳۱ و ... می‌باشد، که در ستون سمت چپ جدول ۵-۱ مشاهده می‌گردد.

1. Point estimate

جدول ۵ - ۱

نمونه‌های دوتایی با جایگذاری	$\overline{X}$
۲۵،۲۵	۲۵
۲۵،۳۷	۳۱
۲۵،۷	۱۶
۳۷،۳۷	۳۷
۳۷،۲۵	۳۱
۳۷،۷	۲۲
۷،۷	۷
۷،۲۵	۱۶
۷،۳۷	۲۲

همانطور که گفته شد احتمال انتخاب کلیه نمونه‌های دوتایی مذکور مساوی و هر یک برابر $\frac{1}{9}$ است. یا به عبارت دیگر احتمال بدست آوردن هر یک از $\overline{X}$ های جدول ۵ - ۱ برابر $\frac{1}{9}$ است. بدین ترتیب با توجه به فرمولهای قسمت ۳-۹ میانگین و واریانس $\overline{X}$ ها به ترتیب عبارت خواهد بود از:

$$\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X})$$
$$= \sum p_i \overline{X}_i = \frac{1}{9} \times 25 + \frac{1}{9} \times 31 + ... + \frac{1}{9} \times 22 = 23$$
$$\sigma^2(\overline{X}) = \sum p_i [\overline{X}_i - E(\overline{X})]^2$$
$$= \frac{1}{9}(25-23)^2 + \frac{1}{9}(31-23)^2 + ... + \frac{1}{9}(22-23)^2 = 76$$

بدین ترتیب انحراف معیار میانگین‌ها که خطای معیار میانگین[1] نامیده می‌شود برابر $\sqrt{76}$ خواهد شد. چنانچه ملاحظه می‌گردد میانگین $\overline{X}$ ها برابر همان میانگین حقیقی جامعه است ولی واریانس آن ۲ برابر از واریانس صفت در جامعه کوچکتر است که در واقع عدد ۲ همان حجم نمونه انتخاب شده می‌باشد. به طور کلی می‌توان نوشت:

1. Standard error of mean

$$E(\overline{X}) = E(X) \qquad (۱-۵)$$

$$\sigma^{۲}_{\overline{X}} = \frac{\sigma^{۲}_{x}}{n} = \frac{\sigma^{۲}}{n} \qquad (۲-۵)$$

(۵-۳) خطای معیار میانگین
$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_{x}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

در رابطه (۵-۲) و (۵-۳) معمولاً بجای $\sigma^۲$ و σ از برآوردهای آنها یعنی از واریانس و انحراف معیار نمونه که با $s^۲$ و s نشان داده می‌شود، استفاده می‌گردد. لازم به تذکر است که برای محاسبه $s^۲$ یعنی واریانس نمونه از فرمول زیر استفاده می‌گردد:

$$s^{۲} = \frac{\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \overline{X})^{۲}}{n-۱} \qquad (٤-۵)$$

در رابطه فوق انتخاب ۱ − n بجای n در مخرج کسر به این دلیل است که برآورد حاصل نااریب[1] باشد یعنی امید ریاضی واریانس نمونه برابر واریانس جامعه($\sigma^۲$) گردد.

با انجام تجربیاتی مشابه تجربه فوق، علاوه بر نتایج مذکور، می‌توان به این نتیجه رسید که با افزایش حجم نمونه توزیع میانگین‌های نمونه‌ای ($\overline{X}$ ها) به سمت توزیع نرمال میل می‌کند. و به عبارت دیگر مطالب فوق را می‌توان بصورت قضیه زیر بیان کرد:

قضیه: اگر کمیت تصادفی X دارای توزیعی با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد، میانگین نمونه‌ای $\overline{X}$ که براساس نمونه‌گیری تصادفی به حجم n بدست می‌آید، دارای توزیعی با میانگین μ و انحراف معیار $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ است که با بزرگ شدن n به سمت توزیع نرمال میل می‌کند.

اینکه در عمل n باید تا چه حد بزرگ باشد تا بتوان از تقریب نرمال استفاده کرد، بستگی به توزیع صفت در جامعه اصلی دارد و هر قدر توزیع جامعه اصلی به توزیع نرمال نزدیک‌تر باشد n کمتری جوابگوی دقت کافی برای کاربرد این تقریب خواهد بود، به نحوی که وقتی توزیع صفت در جامعه اصلی نرمال باشد برای هر مقدار n ، توزیع $\overline{X}$ نرمال خواهد بود. خوشبختانه در اکثر مطالعات پزشکی و بهداشتی و سایر علوم تجربی توزیع صفات مورد مطالعه نزدیک به نرمال بوده و یا با یک تغییر متغیر ساده نزدیک به نرمال می‌شود و انتخاب ۳۰ = n برای کاربرد تقریب فوق کافی است.

---

1. Unbiased

براساس قضیه فوق می‌توان این احتمال را که میانگین نمونه یعنی $\overline{X}$ در فاصله معینی قرار گیرد به صورت زیر محاسبه کرد:

$$P(a < \overline{X} < b) = p(z_۱ = \frac{a-\mu}{\sigma_{\overline{X}}} < z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\overline{X}}} < z_۲ = \frac{b-\mu}{\sigma_{\overline{X}}}) \qquad (۵-۵)$$

که متغیر z دارای توزیع نرمال استاندارد است و در فصل چهارم درباره آن بحث شده است.

مثال۱ : اگر جامعه‌ای با میانگین ۵۰ و انحراف معیار ۹ داشته باشیم، مطلوب است احتمال اینکه میانگین یک نمونه ۳۶ تایی:

الف. از ٤۸ کمتر باشد.

ب . در فاصله ٤۹ تا ۵۳ باشد.

حل:

طبق قضیه فوق میانگین‌های حاصل از نمونه‌های ۳٦ تائی دارای یک توزیع نرمال با میانگین ۵۰= μ و انحراف معیار ۱/۵ = $\frac{۹}{\sqrt{۳٦}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ می‌باشد. بنابراین برای حل قسمت الف داریم:

$$p(\overline{X} < ٤۸) = p(z < \frac{٤۸-۵۰}{۱/۵} = -۱/۳۳)$$

که با استفاده از جدول شماره IV خواهیم داشت:

$$P(\overline{X} < ٤۸) = ۰/۵ - ۰/٤۰۸۲ = ۰/۰۹۱۸$$

و برای حل قسمت ب با استفاده از رابطه (۵-۵) داریم:

$$p(٤۹ < \overline{X} < ۵۳) = p\left(\frac{٤۹-۵۰}{۱/۵} < z < \frac{۵۳-۵۰}{۱/۵}\right)$$
$$= P(-۰/٦۷ < z < ۲)$$
$$= ۰/۷۲۵۸$$

مثال ۲: در یک جامعه با میانگین μ و انحراف معیار σ نمونه‌ای با حجم n انتخاب می‌کنیم. مطلوبست:

الف. احتمال اینکه اختلاف $\overline{X}$ از میانگین حداکثر برابر a باشد.

ب. اگر ۱٦= σ و ٦٤ = n و ۳ = a باشد، مقداری عددی این احتمال را محاسبه کنید.

حل:

براساس قضیه فوق توزیع $\overline{X}$ را می‌توان توزیعی نرمال با میانگین μ و انحراف معیار $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ دانست و بدین ترتیب برای حل قسمت الف خواهیم داشت:

$$P(\mu - a < \overline{X} < \mu + a) =$$

$$= P\left(\frac{\mu - a - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z < \frac{\mu + a - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(-\frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z < \frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

و برای حل قسمت ب خواهیم داشت:

$$P\left(\frac{-۳}{\frac{۱۶}{\sqrt{۶۴}}} < z < \frac{۳}{\frac{۱۶}{\sqrt{۶۴}}}\right) = P(-۱/۵ < z < ۱/۵)$$

$$= ۲ \times ۰/۴۳۳۲$$

$$= ۰/۸۶۶۴$$

۵-۴. برآورد فاصله‌ای برای میانگین

برای درک مطلب مورد بحث، مثال ۲ را با سوال زیر دنبال می‌کنیم: چه مقدار به میانگین اضافه و کم کنیم تا با احتمال $۱ - \alpha$ (α معرف سطح اشتباه است) $\overline{X}$ در فاصله مذکور قرار گیرد؟

براساس قضیه فوق توزیع $\overline{X}$ را می‌توان توزیعی نرمال با میانگین μ و انحراف معیار $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ فرض کرد. حال اگر a مقدار مورد نظر باشد، خواهیم داشت:

$$P(\mu - a < \overline{X} < \mu + a) = P\left(\frac{\mu - a - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z < \frac{\mu + a - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \quad (۵-۶)$$

$$= ۱ - \alpha$$

اکنون اگر بطور کلی برای مقدار معینی مانند γ کمیت z_γ را بصورت زیر تعریف کنیم:

«z_γ عبارت است از مقداری از کمیت که سطح زیرمنحنی نرمال استاندارد از منهای بینهایت تا این نقطه برابر γ باشد»

با توجه به قرینه بودن توزیع نرمال حول میانگین خواهیم داشت:

$$\frac{-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=z_{\frac{\alpha}{۲}}$$

$$\frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}$$

که از هر یک از دو تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$a=z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (۷-۵)$$

بدین ترتیب اگر $a=z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ را به میانگین اضافه و از آن کم کنیم، با احتمال α – ۱ میانگین نمونه‌ای یعنی $\overline{X}$ در این فاصله قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر اگر به $\overline{X}$ مقدار $a=z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ را اضافه و کم کنیم، حدودی حاصل می‌گردد که با احتمال α – ۱ میانگین جامعه یعنی μ را در برخواهد گرفت و این یک برآورد فاصله‌ای برای میانگین می‌باشد و به طور کلی اگر حدود اعتماد میانگین را برای α – ۱ بخواهیم، می‌توان نوشت:

$$\mu=\overline{X}+z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{(حد بالا)}$$

$$(۸-۵)$$

$$\mu=\overline{X}-z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{(حد پایین)}$$

معمولاً در پزشکی حدود اعتماد میانگین را برای ۹۵ یا ۹۹ درصد اطمینان محاسبه می‌کنند. یعنی مقدار z به ترتیب تقریباً برابر ۲ و ۲/۵ خواهد شد. نکته مهم اینکه اگر در فرمولهای فوق به جای σ از برآورد آن یعنی s که از رابطه ۵ – ٤ بدست می‌آید، استفاده شود، بجای z که دارای

توزیع نرمال است، از توزیع دیگری به نام t استفاده می‌شود، و متذکر می‌گردد که این توزیـع دارای پارامتری به نام درجه آزادی[1] (d.f) است که مقدار آن در موارد فوق‌الذکر برابر ۱ − n است. وقتـی n بزرگتر از ۳۰ باشد تقریبا مقـدار z و t بـا یکـدیگر مسـاوی مـی‌شـود. جـدول شـماره V سـطح زیرمنحنی را برای توزیع t نشان می‌دهد.

مثال ۳: صفت X در جامعه‌ای دارای توزیع تقریباً نرمال، و انحراف معیـار آن ۱۰/۵ = σ اسـت. از این جامعه یک نمونه تصادفی به حجم $\underset{n<۳۰}{\underline{n = ۲۵}}$ انتخاب کرده‌ایم و مشاهده می‌شـود کـه میـانگین آن ۴۰ = $\bar{X}$ است. مطلوب است:

الف. تعیین حدودی که با ۹۵ درصد اطمینان میانگین جامعه را در برگیرد.

ب. تعیین حدودی که با ۹۹ درصد اطمینان میانگین جامعه را در برگیرد.

ج. حل قسمت الف و ب در صورتیکه انحراف معیار جامعه معلوم نباشد و عـدد ۱۰/۵ بـرآورد آن باشد یعنی s = ۱۰/۵ .

حل:

برای حل قسمت اول که $\underline{۰/۰۵ = \alpha}$ است، برای حد بالا خواهیم داشت:

$$\mu=\bar{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{(حد بالا)}$$

$$=۴۰+z_{۰/۹۷۵}\times\frac{۱۰/۵}{\sqrt{۲۵}}$$

$$= ۴۰ + ۱/۹۶ \times ۲/۱$$

$$= ۴۴/۱۱۶$$

و به همین ترتیب برای حد پایین داریم:

$$\text{(حد پایین)}\ \mu = ۴۰ - ۴/۱۱۶$$

$$= ۳۵/۸۸۴$$

و برای حل قسمت ب که ۰/۰۱ = α است، خواهیم داشت:

$$\mu=۴۰+z_{۱-۰/۰۰۵}\times\frac{۱۰/۵}{\sqrt{۲۵}} \quad \text{(حد بالا)}$$

$$= ۴۰ + ۲/۵۷۵ \times ۲/۱$$

$$= ۴۵/۴۰۷۵$$

و به همین ترتیب:

$$\text{(حد پایین)}\ \mu = ۴۰ - ۵/۴۰۷۵$$

$$= ۳۴/۵۹۲۵$$

1. Degrees of freedom

و برای حل قسمت ج برای حدود اعتماد ۹۵ درصد خواهیم داشت:

$$\mu=\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\times\frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{(حد بالا)}$$

$$=40+t_{1-0/025}\times\frac{10/5}{\sqrt{25}}$$

$$d.f = n - 1 = 25 - 1 = 24$$

با مراجعه به جدول شماره V ملاحظه می‌گردد که مقدار $t_{0/975}$ برای ۲٤ درجه آزادی برابر ۲/۰٦٤ است و خواهیم داشت:

$$\mu = 40 + 2/064 \times 2/1 \quad \text{(حد بالا)}$$

$$= 44/3344$$

و به همین ترتیب:

$$\mu = 40 - 2/064 \times 2/1 \quad \text{(حد پایین)}$$

$$= 35/6656$$

و برای حل قسمت ج برای اعتماد ۹۹ درصد و درجه آزادی $d.f = 25 - 1 = 24$ خواهیم داشت:

$$\mu=40+t_{1-0/005}\times\frac{10/5}{\sqrt{25}} \quad \text{(حد بالا)}$$

$$= 40 + 2/797 \times 2/1$$

$$= 45/8737$$

$$\mu = 40 - 5/8737 = 34/1263 \quad \text{(حد پایین)}$$

۵-۵. تقریب توزیع دو جمله‌ای به توزیع نرمال و برآورد نسبت

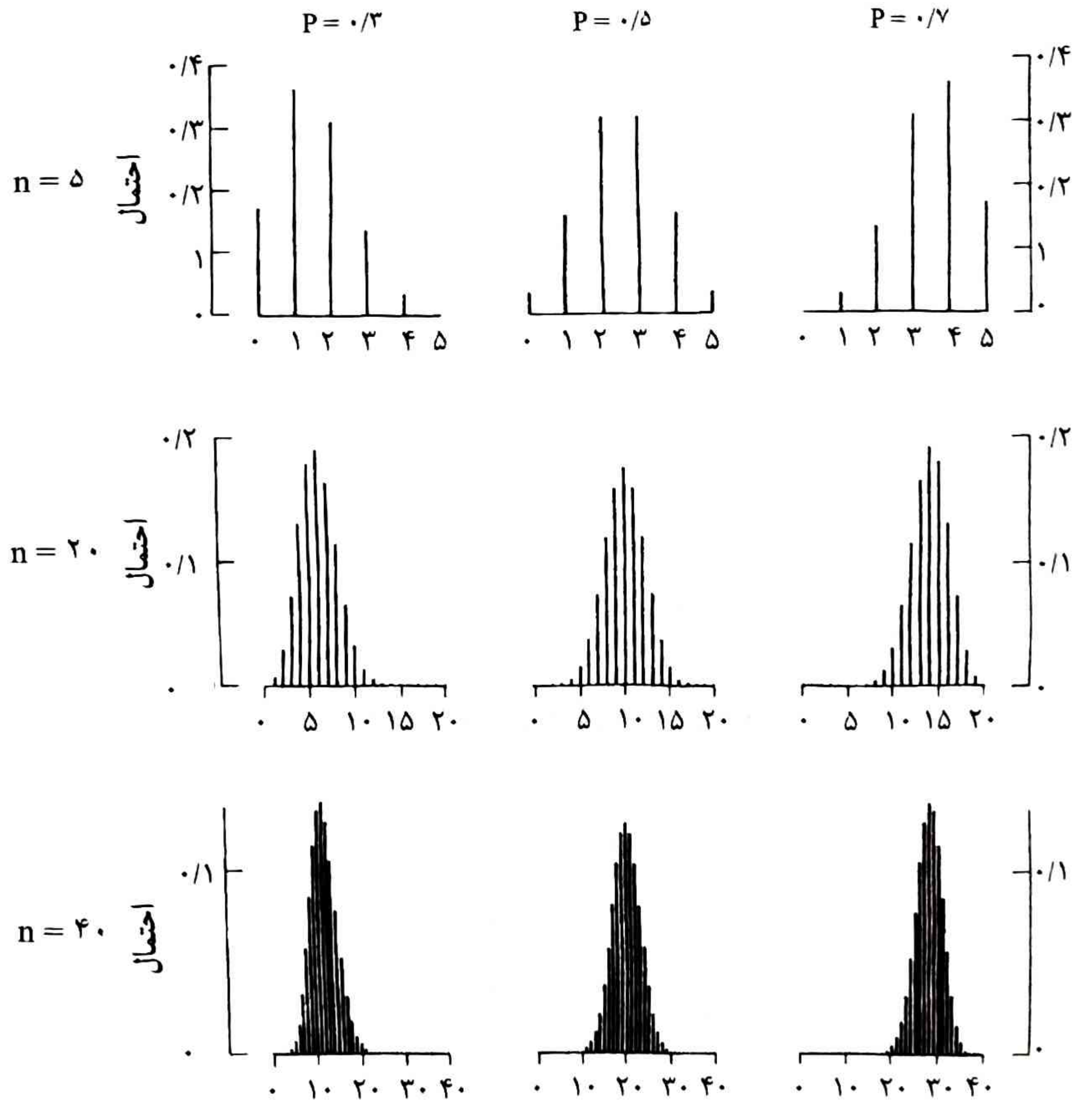
همانطور که در ۳-۸ به هنگام بحث درباره کمیت تصادفی گفته شد، اگر در آزمایشی احتمال موفقیت برابر p باشد و این آزمایش n بار بطور مستقل از هم تکرار گردد، احتمال x موفقیت و یا احتمال اینکه فراوانی نسبی موفقیت برابر $\frac{x}{n}$ باشد، از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$P_n(\frac{x}{n}) = C_n^x p^x \, (1 - p)^{n-x}$$

در عمل بیشتر احتیاج خواهد بود احتمال قرار گرفتن کمیت $\frac{x}{n}$ را در فاصله معینی، مثلا a تا b محاسبه نماییم. اگر بخواهیم این احتمال را براساس فرمول بالا محاسبه کنیم، بایستی احتمال فوق

را برای کلیه $\frac{x}{n}$ هایی که در این فاصله قرار می‌گیرد محاسبه و با هم جمع کنیم، که با بـزرگ شـدن n محاسبه آن مشکل و تقریبا غیر ممکن می‌گردد. خوشبختانه بـا بـزرگ شـدن n توزیـع فـوق بـه سمت توزیع نرمال با میانگین p و انحراف معیار $\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}$ میل می‌کند.[۱]

اشکال زیر توزیع‌های دو جمله‌ای را برای p و n های مختلف نشان می‌دهد. ملاحظه می‌گـردد که با رسیدن np به مرز ۵ (n(1-p) به مرز ۵ وقتی $p > ۰/۵$ است) توزیع تعداد موفقیت بـه نرمـال نزدیک و با رسیدن به مرز ۱۰ تقریب به نرمال کاملاً مطلوب است.



۱. در عمل کافی است np و $n(۱-p)$ هر دو بزرگتر از ۵ باشد. پاره‌ای از کتابهای آماری این شرط را بزرگتر از عـدد ۱۰ می‌دانند.

جدول ۵ – ۲ احتمال را برای تکرار ۱۲ بار آزمایش وقتی p =۰/۵ باشد و حداقل ۹ بار موفقیت حاصل شود با روش توزیع دو جمله‌ای و تقریب نرمال نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که باتصحیح تبدیل کمیت ناپیوسته به پیوسته (که در آن برای هر عدد فاصله ۰/۵ واحد کمتر تا ۰/۵ واحد بیشتر در توزیع پیوسته منظور می‌شود) مثلاً منظور کردن فاصله ۸/۵ تا ۹/۵ برای عدد ۹، نتیجه محاسبه برای هر دو توزیع تقریباً یکسان می‌شود. توجه داشته باشید که در این مثال np ,nq مساوی و برابر ٦ است. خاصیت فوق به ما کمک می‌کند تا در برآورد حدود اعتماد نسبت و تست آماری مربوط به نسبت از خواص توزیع نرمال استفاده کنیم که البته محاسبات به مراتب آسان‌تر خواهد شد.

جدول ۵ – ۲. احتمال مشاهده ۹ رخداد یا بیشتر، زمانی که ۱۲ = n و ۰/۵ = p است

احتمالات براساس توزیع دو جمله‌ای		
۹ رخداد		$220 \times 0/5^{12} = 0/0537$
۱۰ رخداد		$66 \times 0/5^{12} = 0/0161$
۱۱ رخداد		$12 \times 0/5^{12} = 0/0029$
۱۲ رخداد		$1 \times 0/5^{12} = 0/0002$
مجموع ۹ رخداد و بیشتر		۰/۰۷۲۹
احتمالات براساس تقریب توزیع نرمال		
براساس سطح بالای ۹	۰/۰٤۱۸	
براساس سطح بالای ۸/۵	۰/۰۷٤۹	

با استفاده از سطح زیرمنحنی نرمال استاندارد می‌توان احتمال اینکه $\frac{x}{n}$ در فاصله a تا b قرار گیرد را به آسانی طبق رابطه زیر محاسبه نمود:

$$P(a < \frac{x}{n} < b) = p(\frac{a-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z < \frac{b-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}) \qquad (۵-۹)$$

با استفاده از همین خاصیت، مشابه آنچه که در مورد برآورد فاصله‌ای برای میانگین گفته شد، می‌توان برآورد فاصله‌ای برای نسبت بدست آورد. بدیهی است در این مورد $\frac{x}{n}$ خود برآوردی نقطه‌ای از p خواهد بود. براین اساس حدود اعتماد $1-\alpha$ برای p عبارت خواهد بود از:

$$p=\frac{x}{n}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{(حد بالا)}$$

(۱۰-۵)

$$p=\frac{x}{n}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{(حد پایین)}$$

به عبارت دیگر با احتمال $1-\alpha$ حدودی که از رابطه فوق حاصل می‌شود مقدار واقعی p را دربرمی‌گیرد. در محاسبه حدود اعتماد نسبت از رابطه (۵-۱۰) به علت معلوم نبودن مقدار p در زیر رادیکال از برآورد آن یعنی $\frac{x}{n}$ استفاده می‌شود.

مثال ٤: اگر نسبت مبتلایان به بیماری فشار خون در جامعه زنان ۳۵ سال به بالا در یک شهرستان برابر ۰/۲ باشد و از این جامعه یک نمونه تصادفی به حجم n = ۱۰۰ انتخاب کنیم، مطلوبست:

الف. احتمال اینکه نسبت مبتلایان به فشار خون در نمونه انتخابی حداقل ۰/۲۵ باشد.

ب. احتمال اینکه حداکثر ۱۸ درصد افراد نمونه به فشار خون مبتلا باشند.

ج. احتمال اینکه نسبت مبتلایان به فشار خون در نمونه مورد بحث در فاصله ۰/۲۸ تا ۰/۳۰ باشد.

برای حل قسمت الف داریم:

$$P(\frac{x}{n}>0/25)=p(z>\frac{0/25-0/2}{\sqrt{\frac{0/2\times 0/8}{100}}})$$

$$=P(z>1/25)$$

$$=0/5-0/3944=0/1056$$

برای حل قسمت ب داریم:

$$P(\frac{x}{n}<0/18)=p(z<\frac{0/18-0/2}{\sqrt{\frac{0/2\times 0/8}{100}}})$$

$$=P(z<-0/5)$$

$$=0/5-0/1915=0/3085$$

برای حل قسمت ج داریم:

$$P(۰/۲۸<\frac{x}{n}<۰/۳)=P(\frac{۰/۲۸-۰/۲}{\sqrt{\frac{۰/۲\times ۰/۸}{۱۰۰}}}<z<\frac{۰/۳-۰/۲}{\sqrt{\frac{۰/۲\times ۰/۸}{۱۰۰}}})$$

$$= P\ (۲< z < ۲/۵)$$

$$= ۰/۴۹۳۸ - ۰/۴۷۷۲ = ۰/۰۱۶۶$$

مثال ۵: به منظور برآورد نسبت مبتلایان به عیب دید چشم در دانش آموزان یک ناحیه آموزش و پرورش نمونه‌ای تصادفی به حجم $n = ۱۴۰$ از این دانش آموزان انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌گردد که ۲۰ نفر آنها به عیب دید چشم مبتلا هستند. مطلوب است تعیین حدودی که اولا با احتمال ۰/۹۵ و ثانیاً با احتمال ۰/۹۹ نسبت مبتلایان به عیب دید چشم را در جامعه فوق دربرگیرد.

حل:

برای حل قسمت اول که در آن $\alpha = ۰/۰۵$ است خواهیم داشت:

$$p=\frac{۲۰}{۱۴۰}+z_{۰/۹۷۵}\times\sqrt{\frac{\frac{۲۰}{۱۴۰}\times\frac{۱۲۰}{۱۴۰}}{۱۴۰}} \quad \text{(حد بالا)}$$

$$= ۰/۱۴۲۹ + ۱/۹۶\ (۰/۰۲۹۶) = ۰/۲۰۰۹$$

$$p = ۰/۱۴۲۹ - ۱/۹۶\ (۰/۰۲۹۶) = ۰/۰۸۴۹ \quad \text{(حد پایین)}$$

برای حل قسمت دوم که در آن $\alpha = ۰/۰۱$ است، خواهیم داشت:

$$p=\frac{۲۰}{۱۴۰}+z_{۰/۹۹۵}\times\sqrt{\frac{\frac{۲۰}{۱۴۰}\times\frac{۱۲۰}{۱۴۰}}{۱۴۰}} \quad \text{(حد بالا)}$$

$$= ۰/۱۴۲۹ + ۲/۵۷۵ \times ۰/۰۲۹۶ = ۰/۲۱۹۱$$

و

$$P = ۰/۱۴۲۹ - ۲/۵۷۵\times ۰/۰۲۹۶ = ۰/۰۶۶۷ \quad \text{(حد پایین)}$$

اگر عدد ثابت ۲ به هر یک از دو گروه موفقیت و عدم موفقیت اضافه کرده و آنگاه از رابطه (۵ -۱۰) حدود اعتماد را محاسبه کنیم، حدود اعتماد حاصل واقعی‌تر خواهد شد. این روش به نام فاصله اطمینان اگرستی ـ کول[1] معروف است. مثلا برای محاسبه حدود اعتماد نسبت موفقیت برای

1. Agresti – Coull

۹ بار موفقیت در تکرار ۱۰ بار آزمایش خواهیم داشت:

$$p = \frac{۹+۲}{۱۰+٤} = ۰/۷۸٦$$

$$\text{حد بالا برای ۹۵ درصد اطمینان} = ۰/۷۸٦ \pm ۱/۹٦\sqrt{\frac{۰/۷۸٦ \times ۰/۲۱٤}{۱٤}}$$

۱/۰۰ = حد بالا

۰/۵۷ = حد پایین

٥-٦. تعداد نمونه لازم برای برآورد میانگین و نسبت

همانطور که در قسمت ٥-٤ آمده است، برآورد فاصله‌ای میانگین با اعتماد $(\alpha - ۱)$ برای حد بالا از رابطه $\overline{X} + z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و برای حد پایین از رابطه $\overline{X} - z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ محاسبه می‌شود.

در اینجا عبارت $z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ را حد اشتباه برآورد می‌نامیم. بدیهی است برای کاهش این اشتباه یعنی افزایش دقت، لازم است حجم نمونه را افزایش داد. اینک اگر این سوال مطرح شود که حجم نمونه را چقدر انتخاب کنیم که با احتمال $\alpha - ۱$ اشتباه برآورد از مقدار ثابت d تجاوز نکند. طبق تعریف فوق خواهیم داشت:

$$d = z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

و از اینجا

$$n = \left(\frac{z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \times \sigma}{d}\right)^{۲} \qquad (۱۱-٥)$$

در این صورت با این تعداد نمونه طول حدود اعتماد میانگین برای اعتماد $\alpha - ۱$ برابر ۲d خواهد شد. به عبارت دیگر با احتمال $(\alpha - ۱)$ اشتباه برآورد از d تجاوز نخواهد کرد.

با استدلالی مشابه استدلال فوق در مورد نسبتها از رابطه (٥-۱۰) خواهیم داشت:

$$d = z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \times \sqrt{\frac{p\,(۱-p)}{n}}$$

و از آنجا :

برای اطلاع از روش اگرستی - کول به سایرکتب آماری از قبیل مرجع شماره ۱۳ این کتاب مراجعه شود.

$$n=\left(\frac{z^{۲}_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\times p(۱-p)}{d^{۲}}\right) \qquad (۱۲-۵)$$

در این صورت با این تعداد نمونه طول حدود اعتماد نسبت برای اعتماد $\alpha - ۱$ برابر ۲d و به عبارت دیگر با احتمال $(\alpha - ۱)$ اشتباه برآورد از d تجاوز نخواهد کرد.

در روابط (۵-۱۱) و (۵-۱۲) چنانچه مقدار σ و یا p در اختیار نباشد معمولاً از برآورد آنها یعنی s و یا $p=\frac{x}{n}$ استفاده می‌شود. در این صورت تعداد نمونه به صورت تقریب محاسبه می‌گردد و برای مقاصد عملی کافی می‌باشد. در مورد نسبتها چون عبارت p(1-p) موقعی ماکزیمم می‌شود که p برابر ۰/۵ باشد، لذا وقتی مقدار p در اختیار نباشد می‌توان مقدار آن را برابر ۰/۵ فرض کرد که در این صورت اگر مقدار حقیقی p به ۰/۵ نزدیک باشد (در فاصله ۰/۳ تا ۰/۷) مقدار قابل توجهی به تعداد نمونه اضافه نمی‌شود ولی اگر مقدار p از ۰/۳ کوچکتر و یا از ۰/۷ بزرگتر باشد افزایش نمونه بر پایه p = ۰/۵ قابل توجه خواهد بود و ممکن است محقق را به برآورد مناسبی برای p وادار سازد.

همانطور که در قسمت ۵-۲ آمده است روابط (۵-۱۱) و (۵-۱۲) در جوامع نامحدود و یا در جوامع محدود در صورت نمونه‌گیری با جایگذاری صادق است.

√مثال ٦ : گیریم توزیع طول قد نوزدان در یک جامعه از توزیع نرمال با انحراف معیار ۳ سانتیمتر پیروی کند. اگر محققی بخواهد میانگین طول قد این نوزادان را با دقت ۱ سانتیمتر برای یک حدود اعتماد ۹۵ درصد برآورد کند تعداد نمونه مورد نیاز عبارت خواهد بود از:

$$n=\left(\frac{z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\times\sigma}{d}\right)^{۲}=\left(\frac{۱/۹٦\times ۳}{۱}\right)^{۲}=۳۵$$

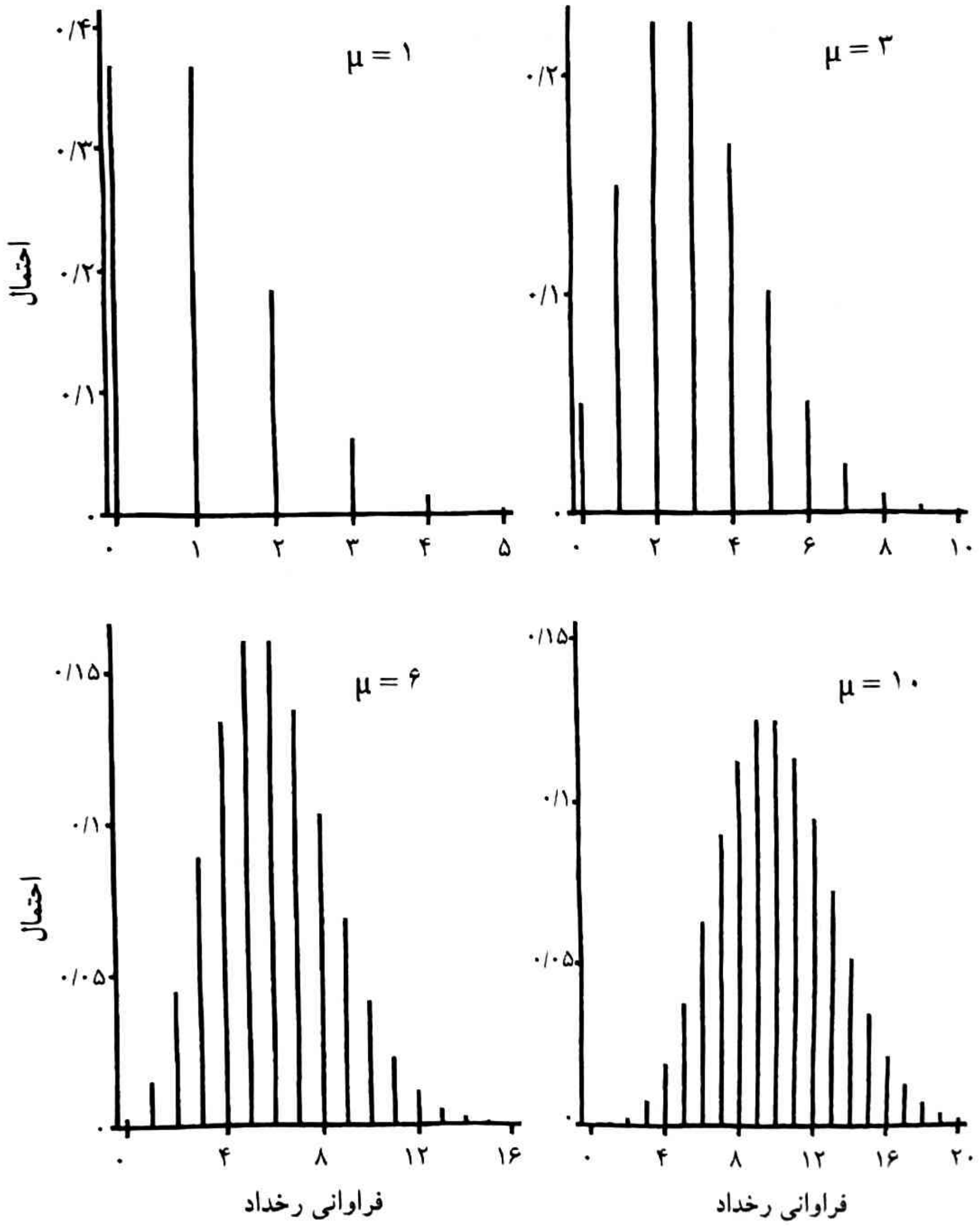
√ مثال ۷: محققی از مطالعات قبلی خود دریافته است که نسبت دوقلوزایی به طور کلی از ۲ درصد زایمان‌ها تجاوز نمی‌کند. اینک اگر این محقق بخواهد نسبت دوقلوزایی را در جامعه بادقت ۰/۰۰۵ و با یک حدود اعتماد ۹۹ درصد برآورد کند، می‌تواند p را برابر ۰/۰۲ فرض کرده و تعداد نمونه مورد نیاز را با تقریب اضافی به صورت زیر محاسبه کند.

$$n=\frac{z^{۲}_{۱-\frac{\alpha}{۲}}p(۱-p)}{d^{۲}}$$

$$n = \frac{۲/۵۸^{۲} \times ۰/۰۲ \times ۰/۹۸}{(۰/۰۰۵)^{۲}}$$
$$= ۵۲۱۹$$

۵-۷. تقریب توزیع پوآسون به توزیع نرمال و برآورد میانگین توزیع پواسون

در توزیع پوآسون هنگامی که میانگین بزرگ باشد توزیع به توزیع نرمال نزدیک می‌شود. نمودارهای زیر شکل ٤ توزیع پوآسون را برای میانگین‌های ۱، ۳، ٦ و ۱۰ نشان می‌دهد. در این جا هم ملاحظه می‌شود که وقتی میانگین به حدود ۱۰ می‌رسد توزیع حاصل تقریباً نرمال است.



از این توزیع موقعی استفاده می‌شود که واقعه‌ای در زمان‌هـای مختلـف بـه صـورت مسـتقل و تصادفی رخ دهد. گرچه این شرایط برای وقوع بیماری‌های عفـونی بـه دلیـل واگیـری آنهـا برقـرار نیست لیکن در مورد بیماری‌های غیر واگیر تا اندازه‌ای قابل قبول می‌باشد. اسـتفاده از ایـن تقریـب محاسبه حدود اعتماد و تست‌های آماری را برای رخداد حوادث بزرگ در زمان‌های مختلف آسـان می‌سازد.

با استفاده از روابط (۵-۸) و (۵-۱۱) فرمول حدود اعتماد میانگین و حجم نمونه بـرای بـرآورد میانگین در توزیع پوآسون برابر است با :

$$\lambda = \hat{\lambda} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\hat{\lambda}} \quad \text{(حد بالا)}$$

$$\lambda = \hat{\lambda} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\hat{\lambda}} \quad \text{(حد پایین)}$$

$$n = \frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \lambda}{d^2}$$

تمرین

۱. اطلاعات مربوط به تمرین ۹ فصل اول را یک جامعه آماری فرض کرده و برای این جامعه:
الف: میانگین، واریانس و انحراف معیار سن مرگ را حساب کنید.
ب: نمودار این اطلاعات را به فواصل ده سال رسم کنید.
ج: از این جامعه سه نمونه تصادفی با جایگذاری به اندازه‌های $n = ۵$ و $n = ۱۰$ و $n=۲۰$ انتخاب و میانگین و واریانس و انحراف معیار هر نمونه را حساب کنید.
د: در نظر است کلیه میانگین‌های نمونه‌های فوق که توسط دوستان شما محاسبه شده جمع‌آوری و در اختیار شما قرار گیرد، پس از دریافت این نمونه‌ها میانگین، واریانس و انحراف معیار میانگین نمونه‌های ۵، ۱۰ و ۲۰ تایی را محاسبه و درباره صحت روابط (۵-۱)، (۵-۲) و (۵-۳) بحث کنید.
هـ : میانگین‌های نمونه‌های فوق را به فواصل ۵ سال گروه بندی و نمودار آن را رسم کنید. ضمن مقایسه این نمودارها با یکدیگر و همچنین با نمودار جامعه اصلی و بالاخره در نظر گرفتن نتایج قسمت (د) درباره قضیه مذکور در قسمت ۵-۳ بحث کنید.

۲. اگر توزیع صفتی در جامعه‌ای تقریباً نرمال و میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب برابر ۲۰ و ٤ باشد و از این جامعه یک نمونه تصادفی با حجم $n = ٦٤$ انتخاب شود، مطلوب است احتمال اینکه میانگین نمونه:
الف: بزرگتر از ۲۱ باشد
ب: بزرگتر از ۲۰/۵ باشد
ج: در فاصله ۱۹ تا ۲۱ باشد
د: بزرگتر از ۲۵ باشد
هـ : کوچکتر از ۱۸/۲۱ باشد

۳. اگر انحراف معیار وزن نوزادان طبیعی به هنگام تولد برابر ۳۰۰ گرم باشد، مطلوب است احتمال اینکه میانگین وزن یک نمونه تصادفی از این کودکان به حجم $n = ۱۰۰$ حداکثر ۵۰ گرم از میانگین جامعه اختلاف داشته باشد.

٤. اگر در یک نمونه تصادفی به حجم $n = ۱۰۰$ میانگین و انحراف معیار به ترتیب $\overline{X} = ٤۰$ و $s = ۸$ باشد، با چه احتمالی می‌توان اظهار نظر کرد که $\overline{X}$ بیش از یک واحد از میانگین جامعه اختلاف ندارد.

۵. بفرض اینکه توزیع مدت بستری شدن بیماران در یک بخش اعصاب، نرمال باشد و ما ۱۲ بیمار این بخش را که بصورت تصادفی انتخاب شده‌اند از نظر مدت بستری شدن مورد مطالعه قرار دهیم و نتیجه بررسی اعداد ۳۰، ۲۲، ۳۲، ۲٦، ۲٤، ٤۰، ۳٤، ۳٦، ۳۲، ۳۳، ۲۸، ۳۰ روز باشد، حدودی را که با ۹۰ درصد احتمال میانگین مدت بستری شدن بیماران را در برمی‌گیرد محاسبه کنید.

٦. در یک نمونه تصادفی به حجم $n = ٤۰۰$ از کسانی که بر علیه بیماری واکسینه شده‌اند ۸۰ نفر به بیماری مبتلا شدند. مطلوب است:

الف : برآورد نقطه‌ای نسبت مبتلایان در جامعه.

ب : حدودی که با ۹۵ درصد اطمینان نسبت واقعی مصونیت را برای این واکسن شامل می‌گردد.

۷. انحراف معیار صفتی در یک جامعه $\sigma = ۵۰۰$ است. از این جامعه یک نمونه تصادفی به حجم $n = ۲۵$ انتخاب می‌کنیم. و اگر میانگین این نمونه $\overline{X} = ٤۸۰۰$ باشد، برآورد مقدار μ را با حدود اعتماد ۹۵ درصد محاسبه کنید.

۸ . در یک نمونه تصادفی از جامعه مردان ۱۸ سال به بالا به حجم $n = ۲۵$ میانگین فشار خون سیستولیک برابر ۱۳۰ میلیمتر جیوه است. اگر $\sigma = ۱۰$ میلیمتر جیوه باشد حدود اعتماد ۹۹ درصد را برای μ بدست آورید.

۹. اگر میانگین و انحراف معیار مقدار هموگلوبین خون یک نمونه تصادفی از زنان باردار به حجم $n = ۳۶$ به ترتیب برابر ۱۱/۷۵ و ۱/۵ گرم در ۱۰۰ سانتی‌متر مکعب خون باشد، حدود اعتماد میانگین را برای احتمال ۹۵ درصد در جامعه زنان باردار محاسبه کنید.

۱۰. اگر انحراف معیار درآمد خانوار در جامعه‌ای برابر ۲۰/۰۰۰ ریال باشد، چه تعداد خانوار میانگین درآمد را با دقت ۵۰۰ ریال، برای اعتماد ۹۵ درصد بیان می‌کند.

۱۱. براساس تجربیات گذشته گمان می‌رود که وفور بیماری فشار خون در یک جامعه برابر ۲۰ درصد است، حجم نمونه‌ای که وفور حقیقی بیماری را با دقت یک درصد برای $\alpha = ۰/۰۱$ بیان می‌کند برآورد نمایید.

۱۲. تجارب گذشته نشان می‌دهد که انحراف معیار قد جامعه دانش آموزان سال پنجم ابتدایی در یک شهر برابر ۵ سانتیمتر است. محققی می‌خواهد میانگین طول قد را در این جامعه با دقت یک سانتیمتر برای اعتماد ۹۵ درصد برآورد کند. حجم نمونه مورد نیاز را حساب کنید. اگر بخواهید حداکثر اشتباه برآورد او مساوی ۰/۲۵ سانتیمتر باشد به حجم نمونه چقدر اضافه می‌شود؟

۱۳. اگر میزان مرگ و میر اطفال در شهر تهران حداکثر برابر ۲۰ در هزار تولد زنده فرض شود وقایع حیاتی یکسال چه تعداد جمعیت را جمع‌آوری خواهید کرد تا بوسیله آن بتوان مقدار حقیقی این میزان را با دقت ۵ در هزار برای اعتماد ۹۹ درصد بدست آورد (میزان موالید خام را برابر ۱۵ در هزار نفر جمعیت فرض کنید) درباره اشکالات نظری و اجرایی این مسئله بحث کنید.

۱۴. اگر ضریب تغییرات صفتی در جامعه برابر ۱/۵ باشد. با چه تعداد نمونه می‌توان میانگین این صفت را با دقتی برابر ۵ درصد میانگین برای اعتماد ۹۵ درصد برآورد کرد. اگر ضریب تغییرات ۱/۵ درصد باشد برآورد حجم نمونه چقدر است؟

۱۵. در یک آزمون ٤ جوابه ٤٨ سوال به دانشجویان داده شده است. شرط قبولی پاسخ صحیح به حداقل ١٦ سوال است. احتمال قبولی برای فردی که تمام پاسخها را تصادفی انتخاب کند، چقدر است (با استفاده از تقریب نرمال)؟

١٦. در یک نمونه تصادفی به حجم ۱۲۵ هزار از یک جامعه مشاهده شد که ۵۰ نفر مبتلا به سرطان می‌باشند.

الف: شیوع نقطه‌ای این بیماری چقدر است؟

ب : با به کار بردن تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای حدود اعتماد ۹۵ درصد شیوع این بیماری را محاسبه کنید.

ج : با توجه به نادر بودن ابتلا به سرطان و در نتیجه قبول توزیع پواسون برای تعداد افراد مبتلا به سرطان و نیز بزرگ بودن میانگین در این مثال، حدود اعتماد ۹۵ درصد برای شیوع را با استفاده از تقریب نرمال برای پواسن محاسبه کنید.

۱۷. برای برآورد حدود اطمینان میانگین هنگامی از توزیع t استفاده می‌شود که:

الف: واریانس جامعه معلوم باشد.

ب: واریانس جامعه معلوم نباشد.

ج: انتخاب نمونه‌ها از یکدیگر مستقل نباشند.

د: تعداد نمونه کم باشد.

۱۸. در یک نمونه تصادفی دوتایی مجذور تفاضل دو مقدار بدست آمده برآوردی است نا اریب از:

الف) σ^2 ب) $\frac{\sigma^2}{2}$ ج) $2\sigma^2$ د) $4\sigma^2$

۱۹. از یک توزیع نرمال با انحراف معیار ۵ نمونه‌ای تصادفی به حجم ٤ انتخاب می‌کنیم اگر $\overline{X}$ میانگین نمونه باشد احتمال اینکه $\overline{X}$ در فاصله ۵ از میانگین واقعی قرار گیرد تقریباً برابر است با :

الف) ۵۰ درصد ب) ٦٨ درصد

ج) ۹۰ درصد د) ۹۵ درصد

۲۰. در برآورد میزان شیوع یک بیماری وقتی که دقت مطلق مورد نظر باشد حجم نمونه با تغییرات میزان شیوع به صورت زیر خواهد بود:

الف) وقتی ماکزیمم است که میزان شیوع برابر ۵۰ درصد باشد.

ب) با افزایش میزان شیوع کاهش می‌یابد.

ج) با افزایش میزان شیوع افزایش می‌یابد.

د) به میزان شیوع بستگی ندارد.

۲۱. در نمونه‌ای به حجم ٤ از یک توزیع نرمال با واریانس σ^2 احتمال اینکه میانگین نمونه ($\bar{X}$) در فاصله یک σ از میانگین واقعی قرار بگیرد، تقریباً برابر است با:

الف) ۰/٦۸	ب) ۰/۳٤
ج) ۰/۹۵	د) ۰/۹۹

۲۲. شیوع یک بیماری یک در ده هزار است. حجم نمونه‌ای که با ۹۵ درصد اطمینان این شیوع را با خطای نسبی کمتر از ۵۰ درصد برآورد کند برابر است با :

الف)۲۰۰۰۰	ب) ۱٦۰۰۰۰
ج) ۱۲۰۰۰	د)۱۵۰۰۰

۲۳. اگر انحراف معیار صفتی در جامعه برابر ۲۰ باشد و بخواهیم خطای برآورد با ۹۵ درصد اطمینان از ۵ تجاوز نکند حداقل نمونه برابر است با :

الف) ٦۲	ب) ۸
ج) ۱۵۷	د) ۳٤۷

۲٤. اگر انحراف معیار صفتی ٤۰ درصد میانگین آن باشد، حجم نمونه لازم برای اینکه ضریب تغییرات برآورد میانگین از ۱۰ درصد تجاوز نکند برابر است با :

الف) ۳۲	ب) ۸
ج) ٤	د) ۱٦

فصل ششم
آزمون فرضیه

۶-۱. مقدمه

در فصل اول این کتاب متذکر گردید که مفهوم استنتاج و قضاوتهای آماری با قضاوتهایی که در ریاضیات بکار می‌رود تفاوت کلی دارد. به عنوان مثال رابطه انسولین و مقدار قند خون را مورد بحث قرار دادیم و نتیجه گرفتیم که به محض مشاهده یک یا چند تجربه مساعد یا نامساعد تسلیم قبول تأثیر یا عدم تأثیر انسولین روی قند خون نمی‌شویم.

این فصل به بیان پاره‌ای روش‌های آماری که منجر به تصمیم‌گیری درباره رد یا قبول فرضیه‌ای می‌شود اختصاص دارد. از آنجا که این نوع قضاوت از خطا عاری نیست، ممکن است فرضیه‌هایی را که در واقع درست است نادرست بدانیم (اشتباه نوع اول که احتمال آن معمولاً به α نشان داده می‌شود) و برعکس فرضیه‌های نادرست را درست بدانیم (اشتباه نوع دوم که احتمال آن معمولاً به β نشان داده می‌شود) مطالعه این فصل به ما اجازه می‌دهد که مقدار α را تعیین نماییم ولی بیان محاسبه مقدار β از حدود هدف این کتاب خارج است.

۶-۲. فرضیه‌های آماری و روش آزمون آن

یک فرضیه معمولاً به صورت تفکری که ناشی از مشاهده پدیده‌هایی در طبیعت است ظاهر می‌شود. مثال‌هایی مانند قد مردها از زنها بلندتر است، پدر و مادر بلند قد بچه‌های بلند قامت دارند، انسولین قند خون را پایین می‌آورد، سیگار موجب سرطان ریه می‌شود، نمونه‌هایی از یک فرضیه است. چنانچه این تفکر را به بیانی برگردانیم که مبین وضعیت خاصی درباره توزیع یک جامعه معینی و یا توزیع‌های چند جامعه معین باشد، آن بیان را یک فرضیه آماری می‌گویند.

آزمون فرضیه قاعده‌ای است که بوسیله آن مشخص می‌شود که آیا نمونه مورد مطالعه از نظر منطقی با فرضیه مورد نظر مطابقت دارد یا خیر؟ در واقع این قاعده نوعی دستور تصمیم‌گیری است

که قبول فرضیه را برای پاره‌ای از نمونه‌ها و رد فرضیه را برای پاره‌ای دیگر بیان می‌کند.

در هر آزمون آماری یک فرضیه اولیه وجود دارد که آن را فرضیه صفر[1] می‌گویند و معمولاً به H_0 نشان می‌دهند و به عنوان فرضیه مورد آزمون در نظر گرفته می‌شود. در مقابل این فرضیه گروهی از فرضیه‌های مخالفت وجود دارد که با H_1 یا H_A مشخص می‌گردد. فرضیه صفر را می‌توان چون مرکز یا پایه‌ای دانست که فرضیه‌های مخالف[2] در یک یا چند جهت بصورت انحرافاتی از آن بیان می‌شوند. بدین ترتیب مثلاً می‌توان احتمال ظاهر شدن شیر را در پرتاب یک سکه که برابر $\frac{1}{2}$ منظور می‌گردد به عنوان فرضیه صفر یا پایه در نظر گرفت. حال اگر در حالت خاصی وقوع شیر مزیتی محسوب گردد لازم است به گروه فرضیه‌های مخالف یک طرفه‌ای که در آنها احتمال شیر از $\frac{1}{2}$ بزرگتر است توجه نمود ولی اگر برای وقوع شیر یا خط مزیتی قائل نشویم و این مزیت را تنها به وجود تورش[3] مربوط بدانیم در این صورت لازم است به حالت کلی‌تری از فرضیه‌های مخالف دو دامنه‌ای که در آنها احتمال وقوع شیر مخالف $\frac{1}{2}$ است توجه نمود.

گرچه در مثال فوق فرضیه صفر، فرضیه مطلوبی هم می‌باشد ولی انتخاب فرضیه صفر صرفاً به مسئله مورد بحث بستگی دارد. در واقع در غالب موارد، فرضیه صفر همان فرضیه‌ای است که می‌خواهیم غلط بودن آن را به اثبات برسانیم.

انجام آزمون یک فرضیه آماری توسط نمونه هنگامی امکان پذیر می‌گردد که تابعی از نمونه را به عنوان ملاک آزمون انتخاب کنیم که حداقل دارای دو شرط زیر باشد:

اول: توزیع تابع ملاک انتخاب شده مشخص باشد.

دوم: تأثیر غلط بودن فرضیه H_0 روی تابع معلوم باشد (مثلاً باعث افزایش آن گردد).

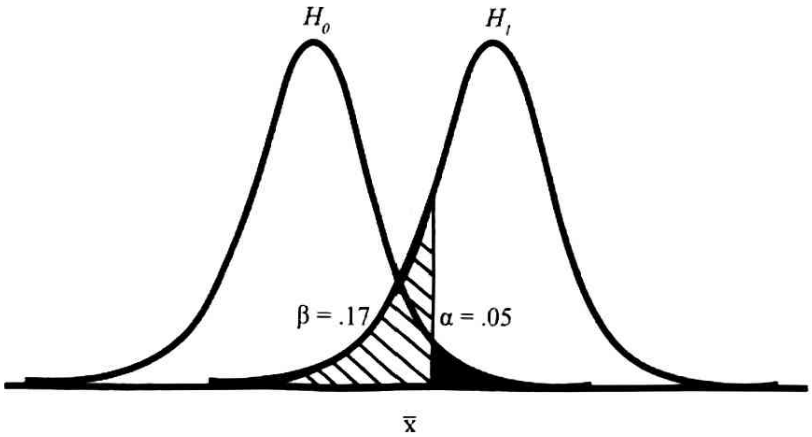
برای روشن شدن مطلب فرض می‌کنیم از جامعه‌ای با توزیع نرمال و با واریانس معلوم σ^2 نمونه‌ای به حجم n انتخاب کنیم و بخواهیم بزرگتر بودن میانگین این جامعه (μ) را از عدد مشخص (μ_0) آزمون کنیم. در این صورت فرضیه صفر (H_0) شامل $\mu = \mu_0$ و فرضیه مخالف آن (H_1 یا H_A) شامل $\mu > \mu_0$ خواهد بود.

حال اگر $\overline{X} = \frac{\sum X}{n}$ را به عنوان ملاک آزمون فوق (تابعی از نمونه) انتخاب کنیم، دو شرط مذکور مراعات گردیده است. چه اولاً قانون توزیع $\overline{X}$ کاملا مشخص است (توزیع نرمال با

---

1. Null hypothesis
2. Alternative hypothesis
3. Bias

میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$) و ثانیاً تأثیر غلط بودن فرضیه H_0 روی این ملاک ($\bar{X}$) در جهت افزایش آن می‌باشد. بدین ترتیب H_0 را هنگامی غلط می‌دانیم که $\bar{X}$ بزرگ باشد. در این جا این سوال مطرح می‌شود که چه مرزی را برای بزرگ بودن $\bar{X}$ انتخاب کنیم که اگر $\bar{X}$ بزرگتر از آن بود فرضیه H_0 را رد و اگر کوچکتر از آن بود فرضیه H_0 را بپذیریم؟ برای جواب به این سوال ابتدا این مطلب را در نظر می‌گیریم که هر قدر این مرز بزرگتر انتخاب شود اشتباه نوع دوم یعنی قبول فرضیه H_0 در صورتیکه این فرضیه غلط باشد بیشتر می‌گردد و از طرف دیگر هر قدر این مرز کوچکتر انتخاب شود احتمال اشتباه نوع اول یعنی غلط دانستن فرضیه H_0 در صورتیکه این فرضیه صحیح باشد بیشتر می‌گردد (شکل ۶ – ۱).



شکل ۶ – ۱. توزیع $\bar{X}$ تحت فرضیه H_0 و H_1

معمولا در آزمونهای آماری این مرز و یا به طور کلی منطقه رد کردن فرضیه H_0 را بر اساس مقدار معینی که برای احتمال اشتباه نوع اول (α) درنظر می‌گیرند تعیین می‌کنند. مقدار این احتمال بستگی به تشخیص و نظر محقق و همچنین موضوع مورد بررسی دارد. در بررسی‌های پزشکی معمولا مقدار α برابر ۰/۰۵ و یا ۰/۰۱ انتخاب می‌گردد. لازم به یادآوری است که می‌توان از آزمونهای مختلفی برای رد یا قبول یک فرضیه آماری استفاده کرد، ولی روش مطلوب روشی است که برای یک α معین مقدار β مینیمم گردد. خوشبختانه در بیشتر مسائل ساده، احساس شخصی و درک مستقیم محقق منجر به انتخاب منطقه‌ای برای رد کردن فرضیه H_0 می شود که شرایط مطلوب برقرار می گردد، بدین معنی که مقدار β می نیمم می شود. در آزمون فرضیه های مربوط به مسائل پیچیده تر یک نظریه ریاضی وجود دارد که به ما اجازه می دهد بهترین منطقه را برای رد فرضیهٔ H_0 انتخاب کنیم. در کلیه آزمونهای مورد بحث در این فصل و فصول بعدی، منطقه رد کردن

فرضیه H_0 براساس این نظریه (در صورتیکه کاربرد آن امکان پذیر باشد) انتخاب می‌گردد ولی از ذکر مجدد این بحث در مورد این آزمونها خودداری می‌شود و در شرح هر آزمون تنها به بیان دستور آن اکتفا می‌گردد. منطق دستور آزمونهای ٦- ۳، ٦ - ٤، ٦ - ۸ و ٦ - ۹ بر پایه قضیه قسمت ۵-۳ است. بنابراین در این آزمونها همواره فرض انتخاب نمونه از جامعه نرمال و یا بزرگ بودن حجم نمونه به اندازه‌ای که بتوان از تقریب نرمال استفاده کرد مورد قبول است. منطق دستور آزمون ٦-۵ و ٦- ۱۰ بر پایه مطالب قسمت ۵-۵ است. به عبارت دیگر انجام این دو آزمون تنها در نمونه‌های بزرگ امکان پذیر می‌باشد و منطق دستور آزمون ٦-٦ بر فرض نرمال بودن توزیع دو جامعه متکی می‌باشد و بالأخره منطق دستور آزمون ٦-۱۱ بر پایه بزرگ بودن تعداد نمونه است.

٦-۳. آزمون اختلاف میانگین یک جامعه با یک عدد مشخص (μ_0) هنگامی که σ معلوم باشد

در این آزمون، فرضیه مخالف، در مقابل فرضیه $\mu = \mu_0$ ممکن است بصورت $\mu > \mu_0$ و $\mu < \mu_0$ که یک دامنه نامیده می‌شود و یا به صورت $\mu \neq \mu_0$ که دو دامنه نامیده می‌شود مورد نظر باشد. هر یک از این دو حالت، جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

٦-۳-۱. آزمون دو دامنه

اگر میانگین جامعه و عدد مشخص را به ترتیب با μ و μ_0 نشان دهیم خواهیم داشت :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

و ملاک آزمون عبارت خواهد بود از:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad (٦-۱)$$

که تحت فرضیه H_0 ملاک z دارای توزیع نرمال استاندارد می‌باشد. حال اگر $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ باشد، یعنی قدر مطلق مقدار این ملاک (z) برای مشاهدات از $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ مربوط به جدول سطح زیر منحنی نرمال استاندارد (که در این جا عدد بحرانی نامیده می‌شود) بزرگتر باشد، فرضیه H_0 را رد و فرضیه مخالف را قبول می‌کنیم. در غیر این صورت گوییم که براساس اطلاعات مشاهده شده، فرضیه H_0

را نمی‌توانیم رد کنیم. اینک به منظور روشن کردن دستور این آزمون به ذکر مثالی می‌پردازیم.

گیریم میانگین و انحراف معیار وزن نوزدانی که مادر آنها با رژیم معینی تغذیه شده‌اند به ترتیب برابر ۲۸۰۰ و ۱۸۰ گرم باشد. حال محققی یک گروه ۳۶ نفری از مادران باردار را تحت رژیم جدیدی قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که میانگین وزن نوزادان این مادران ۲۸۵۰ = $\overline{X}$ گرم می‌شود. چنانچه برای محقق این سوال مطرح شود که آیا اعمال این رژیم وزن نوزادان را تغییر داده است یا خیر؟ با آزمون مورد بحث مواجه خواهد بود. در اینجا فرض براین است که کاربرد این رژیم تغییری در انحراف معیار ایجاد نمی‌کند و یا به عبارت دیگر باعث افزایش و کاهش پراکندگی نمی‌گردد. در این صورت فرضیه H_0 و فرضیه H_1 به ترتیب عبارتند از:

$$H_0 : \mu = ۲۸۰۰$$
$$H_1 : \mu \neq ۲۸۰۰$$

چنانچه احتمال اشتباه نوع اول یعنی α برابر ۰/۰۵ انتخاب شود، عدد بحرانی یعنی $z_{۰/۹۷۵}$ با استفاده از جدول سطح زیر منحنی نرمال برابر ۱/۹۶ خواهد بود. حال برای مشاهدات، ملاک آزمون را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$z = \frac{۲۸۵۰ - ۲۸۰۰}{\frac{۱۸۰}{\sqrt{۳۶}}} = ۱/۶۶$$

چون قدر مطلق مقدار ملاک آزمون (۱/۶۶) از عدد بحرانی (۱/۹۶) کوچکتر است بنابراین فرضیه H_0 را می‌پذیریم و برابری میانگین وزن جامعه نوزدانی را که مادران آنها با رژیم جدید تغذیه شده‌اند با عدد ۲۸۰۰ گرم مردود نمی‌شناسیم و در اصطلاح می‌گوییم اختلاف ۲۸۵۰ و ۲۸۰۰ معنی‌دار نیست.

۶-۳-۲. آزمون یک دامنه

اگر در مثال فوق تأثیر افزایش رژیم جدید روی میانگین وزن نوزادان مورد توجه محقق باشد و او بخواهد به عنوان فرضیه مخالف تنها بزرگتر بودن میانگین وزن نوزادان را از عدد ۲۸۰۰ گرم

آزمون کند، در این صورت با آزمون یک دامنه به صورت زیر مواجه خواهد بود:

$$H_0 : \mu = ۲۸۰۰$$

$$H_1 : \mu > ۲۸۰۰$$

دستور این آزمون مانند قسمت بالا است با این تفاوت که برای فرضیه H_0 بجای $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ از عدد بحرانی $z_{1-\alpha}$ استفاده می‌شود. بدین ترتیب عدد بحرانی برای این آزمون با استفاده از جدول سطح زیر منحنی نرمال عبارت از ۱/٦٤ خواهد بود. چون در این نمونه، مقدار ملاک آزمون (۱/٦٦) از عدد بحرانی (۱/٦٤) بزرگتر است، فرضیه H_0 را مردود می‌شناسیم و چنین اظهار نظر می‌کنیم که میانگین وزن نوزدانی که مادران آنها با رژیم جدید تغذیه شده‌اند از عدد ۲۸۰۰ گرم بزرگتر است. به عبارت دیگر اختلاف ۲۸۵۰ و ۲۸۰۰ در آزمون یک دامنه معنی‌دار می‌گردد. واضح است اگر در این آزمون فرضیه H_1 بصورت $\mu < ۲۸۰۰$ باشد در این صورت وقتی فرضیه H_0 رد می‌شود که ملاک آزمون از عدد بحرانی z_α کوچکتر باشد.

نکته مهم اینکه بایستی قبل از جمع‌آوری و مشاهده اطلاعات، درباره انجام آزمون یک یا دو دامنه تصمیم گرفته شود و اگر قبلاً تصمیمی گرفته نشود به انجام آزمون دو دامنه مبادرت می‌گردد.

٦-۳-۳. تعداد نمونه

در طرح آزمایش مربوط به مقایسه میانگین جامعه با یک عدد مشخص، عموماً محقق با این سوال مواجه خواهد شد که اگر میانگین بجای μ_0 برابر عدد دیگری مثلا μ_1 باشد، بایستی تعداد نمونه چقدر اختیار شود تا آزمون فرضیه « $H_0 : \mu = \mu_0$ » با احتمال معینی مثلاً $(1 - \beta)$ که آن را توان آزمون می‌نامند در سطح اشتباه α معنی‌دار شود؟ در آزمون یک دامنه حجم نمونه لازم برای این منظور عبارت خواهد بود از:

$$n = \frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \qquad (۲-٦)$$

در آزمون دو دامنه، محاسبه دقیق فرمول تعداد نمونه به سادگی میسر نمی‌باشد. ولی در صورتیکه $d\sqrt{n}$ از ۰/۵ بزرگتر باشد با تقریب نسبتاً خوب برآورد تعداد نمونه عبارت خواهد بود از:

$$n = \frac{(z_{1-\frac{\alpha}{2}} + z_{1-\beta})^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \qquad (۳-٦)$$

اکنون با ذکر مثال به روشن شدن کاربرد این دو فرمول مبادرت می‌شود. برای این منظور فرض می‌کنیم در مثال ذکر شده در قسمت ٦-٣-٢ میانگین واقعی وزن نوزدان با رژیم جدید به جای ۲۸۰۰ برابر ۲۸٤٥ گرم باشد. حجم نمونه بایستی چقدر انتخاب شود تا با احتمال $1-\beta = ۰/۸$ فرضیه «$H_۰ : \mu = ۲۸۰۰$» در سطح اشتباه $\alpha = ۰/۰۵$ رد شود.

اگر آزمون یک دامنه مورد نظر باشد رابطه (٦-۲) را مورد استفاده قرار داده و تعداد نمونه لازم عبارت خواهد بود از:

$$n=\frac{(z_{۰/۹۵}+z_{۰/۸})^{۲}\times ۱۸۰^{۲}}{(۲۸٤٥-۲۸۰۰)^{۲}}$$

که با استفاده از سطح زیر منحنی نرمال خواهیم داشت:

$$n=\frac{(۱/٦٤+۰/۸٤)^{۲}\times ۱۸۰^{۲}}{٤٥^{۲}}=۹۹$$

و اگر آزمون دو دامنه مورد نظر باشد از رابطه (٦-۳) تعداد نمونه لازم عبارت خواهد بود از:

$$n=\frac{(z_{۰/۹۷۵}+z_{۰/۸})^{۲}\times ۱۸۰^{۲}}{(٤٥)^{۲}}$$

که مشابه حالت قبل با استفاده از سطح زیر منحنی نرمال نتیجه می‌شود:

$$n=\frac{(۱/۹٦+۰/۸٤)^{۲}\times ۱۸۰^{۲}}{٤٥^{۲}}=۱۲٦$$

با توجه به رابطه ٦-۲ و ٦-۳ حجم نمونه متأثر از توان مورد مطالعه $(1-\beta)$، سطح اشتباه (α)، واریانس صفت مورد مطالعه $(\sigma^{۲})$ و اختلاف $(\mu_۱ - \mu_۰)$ می‌باشد. در عمل مقدار $\sigma^{۲}$ ثابت است و قابل مداخله از طرف محقق نمی‌باشد، سطح اشتباه معمولاً ٥ درصد و توان آزمون ۸۰ یا ۹۰ درصد فرض می‌شود، مقدار $\mu - \mu_۰$ یعنی اختلافی که ارزش کاربردی دارد باید با نظر کارشناس موضوع مورد بحث انتخاب گردد. نکته مهم اینکه با نمونه‌های بالا حتی می‌توان اختلاف ناچیز را که بازده بهداشتی یا اقتصادی ندارد معنی‌دار نشان داد و یا برعکس با نمونه کم به کشف معنی‌دار بودن اختلافات مهم موفق نشد. در عمل باید اولاً حجم نمونه را براساس اندازه مناسب عوامل چهارگانه فوق محاسبه کرد و ثانیاً در صورت امکان نتایج مطالعات مختلف با حجم نمونه کم را تجمیع کرد تا به دلیل افزایش اندازه نمونه توان آزمون و در نتیجه احتمال کشف اختلاف در

صورت وجود آن بیشتر شود.

٦-٤. آزمون اختلاف میانگین یک جامعه با یک عدد مشخص هنگامی که σ معلوم نباشد

این آزمون مشابه آزمون قسمت ٦-٣ است، با این تفاوت که در این جا مقدار σ از روی نمونه توسط s برآورد می‌گردد و در نتیجه (باتوجه به مطالب قسمت ٥-٤) در دستور آن بجای z از t با درجه آزادی $n-1$ استفاده می‌شود. بدین ترتیب ملاک آزمون عبارت از:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \qquad (٤-٦)$$

خواهد بود که تحت فرضیه H_0 این ملاک دارای توزیع t با درجه آزادی $n-1$ می‌باشد. در آزمون دو دامنه قدر مطلق این ملاک را با عدد بحرانی $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ مقایسه کرده و در صورتی فرضیه H_0 را رد می‌کنیم که $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ باشد. در آزمون یک دامنه بسته به اینکه فرضیه (H_1) بصورت $\mu > \mu_0$ و یا $\mu < \mu_0$ بیان شود، ملاک t بدست آمده با $t_{1-\alpha}(n-1)$ و یا $t_\alpha(n-1)$ مقایسه می‌شود. در حالت اول وقتی فرضیه H_0 رد می‌شود که $t > t_{1-\alpha}(n-1)$ و در حالت دوم وقتی H_0 رد می‌شود که $t < t_\alpha(n-1)$ باشد.

چنانچه میانگین افزایش وزن نوزدانی که از شیر مادر تغذیه می‌کنند برابر ٦٥٠ گرم باشد و محققی اضافه وزن ۱۲ نوزاد را که در ماه اول زندگی از شیرخشک معینی تغذیه کرده‌اند به ترتیب اعداد ٥٥٠ ، ٦٢٠، ٥٤٠، ٥٨٠، ٦٥٠، ٦٤٠، ٦٠٠، ٦٢٠، ٥٩٠، ٦٧٠، ٦٢٠، ٦١٠ بدست آورد (میانگین و انحراف معیار این نمونه به ترتیب $\bar{X} = ٦٠٧/٥٠$ و $s = ٣٨/٤٠٥٧$ است) و برای او این سوال مطرح شود که آیا میانگین حقیقی اضافه وزن کودکانی که با این شیرخشک تغذیه می‌شوند با عدد ٦٥٠ گرم برابر است یا خیر؟ محقق با آزمونی از نوع آزمون مورد بحث مواجه خواهد بود. در اینصورت فرضیه های H_0 و H_1 عبارت خواهند بود از:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = ٦٥٠$$

$$H_1 : \mu \neq ٦٥٠$$

اگر اشتباه نوع اول یعنی α مساوی ٠/٠٥ انتخاب شود در این صورت عدد بحرانی یعنی $t_{٠/٩٧٥}(١١)$ با استفاده از جدول t (شماره V) عبارت از ٢/٢٠ خواهد بود. حال برای این مشاهدات،

ملاک آزمون را محاسبه می‌کنیم:

$$t=\frac{۶۰۷/۵۰-۶۵۰}{\frac{۳۸/۴۰۵۷}{\sqrt{۱۲}}}=-۳/۸۴$$

که چون قدر مطلق ملاک آزمون (۳/۸۴) از عدد بحرانی (۲/۲۰) بزرگتر است، بنابراین فرضیه H_0 را مردود می‌شناسیم و می‌گوییم میانگین اضافه وزن نوزدانی که در ماه اول از شیر خشک تغذیه کرده‌اند با عدد ۶۵۰ گرم اختلاف دارد. در این مثال اگر $\alpha=۰/۰۱$ منظور شود بازهم فرضیه H_0 رد می‌شود چه عدد ۳/۸۴ از $t_{۰/۹۹۵}(۱۱)$ یعنی ۳/۱۰ نیز بزرگتر است.

چنانچه در مثال فوق، کمتر بودن اضافه وزن از عدد ۶۵۰ گرم مورد توجه محقق باشد و تنها بخواهد کمتر بودن میانگین اضافه وزن را از عدد ۶۵۰ گرم آزمون کند، با یک آزمون یک دامنه مواجه خواهد بود که برای آن فرضیه H_0 و H_1 عبارتند از:

$$H_0: \mu = ۶۵۰$$

$$H_1: \mu < ۶۵۰$$

اگر α مساوی ۰/۰۱ باشد در این صورت عدد بحرانی یعنی $t_{۰/۰۱}(۱۱)$ عبارت از ۲/۷۲- خواهد بود و چون مقدار t یعنی ملاک آزمون (۳/۸۴-) از مقدار عدد بحرانی (۲/۷۲-) کوچکتر است، فرضیه H_0 را مردود می‌شناسیم و می‌گوییم میانگین اضافه وزن نوزدانی که در ماه اول از شیرخشک تغذیه می‌کنند از عدد ۶۵۰ گرم (میانگین اضافه وزن کودکانی که شیر مادر خورده‌اند) کمتر است. نکته مهم اینکه، چنانچه در این مثال، میانگین نمونه یعنی $\overline{X}$ از عدد ۶۵۰ گرم بزرگتر می‌شد اساساً انجام آزمون یک دامنه تحت شرایط این مثال ضرورتی نداشت و فرضیه H_0 رد نمی‌شد.

در این حالت یعنی وقتی واریانس معلوم نباشد برای محاسبه حجم نمونه همان فرمول‌های ۶-۲ و ۶-۳ به کار گرفته می‌شود ولی به جای σ^2 از برآورد آن که بر پایه اطلاعات قبلی و نظریه کارشناسی تعیین می‌گردد استفاده می‌شود.

۶-۵. آزمون اختلاف نسبت صفت در جامعه با یک نسبت مشخص

چنانچه p معرف نسبت صفت مورد مطالعه در جامعه و p_0 معرف نسبت مشخص شده باشد، در یک آزمون دو دامنه، فرضیه‌های H_0 و H_1 عبارتند از:

$$H_0: p = p_0$$

$$H_1: p \neq p_0$$

انجام این آزمون براین اساس خواهد بود که اگر فرضیه H_0 صحیح باشد، طبق مطالب قسمت ۵-۵ وقتی np و $n(1-p)$ هر دو بزرگتر از ۵ باشند، کمیت $\frac{x}{n}$ که در آن x معرف تعداد افراد واجد صفت مورد مطالعه در این نمونه n تایی است، دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین p و انحراف معیار $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ می‌باشد. بدین ترتیب اصول دستور این آزمون مشابه دستور آزمون ۶-۳ است و ملاک آزمون عبارت خواهد بود از:

$$z=\frac{\frac{x}{n}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \qquad (۶-۵)$$

که بطور مشابه، در آزمون دو دامنه وقتی فرضیه H_0 رد می‌شود که $|z|>z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و در یک دامنه برای فرضیه مخالف (H_1) بصورت $p>p_0$ وقتی فرضیه H_0 رد می‌شود که $z>z_{1-\alpha}$ و برای فرضیه مخالف $p<p_0$ وقتی فرضیه H_0 رد می‌شود که $z<z_\alpha$ باشد.

برای مثال گیریم جراحی براساس مطالعات شخصی خود بداند که ۸۰ درصد بیمارانی که از یک بیماری قلبی رنج می‌برند با نوعی عمل جراحی که دارای تکنیک معینی (مثلاً A) است، بهبودی حاصل می‌کنند. او در بخش خود ۵۰ بیمار مبتلا به همان بیماری قلبی را تحت نوعی عمل جراحی قلب که دارای تکنیک دیگری (مثلاً B) است قرار می‌دهد و ملاحظه می‌کند که ۳۵ نفر آنها بهبود می‌یابند. اگر برای جراح این سوال مطرح شود که آیا احتمال بهبود یافتن با تکنیک B برابر ۰/۸ است یا خیر؟ با آزمون مورد بحث از نوع دو طرفه مواجه خواهد بود و فرضیه‌های H_0 و H_1 عبارت خواهد بود از:

$$H_0: p=0/8$$
$$H_1: p\neq 0/8$$

چنانچه احتمال اشتباه نوع اول یعنی α برابر ۰/۰۵ انتخاب شود، عدد بحرانی یعنی $z_{0/975}$ عبارت از ۱/۹۶ خواهد بود و براساس مشاهدات، ملاک آزمون عبارت خواهد بود از:

$$z=\frac{\frac{35}{50}-0/8}{\sqrt{\frac{0/8\times 0/2}{50}}}=-1/77$$

چون در مثال مورد بحث قدر مطلق مقدار ملاک z (۱/۷۷) از عدد بحرانی (۱/۹۶) کوچکتر

است، بنابراین فرضیه H_0 را می‌پذیریم و مساوی بودن نسبت بهبود یافتگان از تکنیک B را با عدد ۰/۸ مردود نمی‌شناسیم.

چنانچه در مثال فوق، به عنوان فرضیه H_1، بزرگتر بودن p از عدد ۰/۸ یعنی بهتر بودن تکنیک B از تکنیک A مورد نظر باشد، جراح مذکور با آزمونی از نوع آزمون یک دامنه مواجه خواهد بود و ملاک بدست آمده با روش فوق را با عدد بحرانی $z_{1-\alpha}$ مقایسه خواهد کرد.

در طرح آزمایش مربوط به مقایسه نسبت صفت در جامعه با یک عدد مشخص ممکن است محقق با این سوال مواجه شود که اگر نسبت واقعی صفت در جامعه بجای p_0 برابر عدد دیگری مثلاً p_1 باشد، حجم نمونه چقدر انتخاب شود تا آزمون فرضیه «$H_0 : p = p_0$» با احتمال $(1-\beta)$ در سطح اشتباه α معنی دار شود؟ برای آزمون یک دامنه برآورد حجم نمونه لازم عبارت خواهد بود از:

$$n = \frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})^2 p_0 (1-p_0)}{(p_1 - p_0)^2} \qquad (۶-۶)$$

و برای آزمون دو دامنه در قیاس با رابطه (۶-۳) مقدار تقریبی n عبارت خواهد بود از:

$$n = \frac{(z_{1-\frac{\alpha}{2}} + z_{1-\beta})^2 p_0 (1-p_0)}{(p_1 - p_0)^2} \qquad (۶-۷)$$

اینک برای روشن شدن مطلب به ذکر مثالی مبادرت می‌شود. اگر نسبت واقعی افراد واکسینه شده بر علیه یک بیماری معین در جامعه‌ای برابر $p_1 = ۰/۸$ باشد باید چه تعداد نمونه انتخاب کرد تا با ۹۰ درصد اطمینان فرضیه $H_0 : p_0 = ۰/۸۵$ در سطح $\alpha = ۰/۰۱$ معنی‌دار شود؟

حال اگر آزمون یک دامنه مورد نظر باشد از رابطه (۶-۶) خواهیم داشت:

$$n = \frac{(z_{0/99} + z_{0/9})^2 \times 0/85 \times 0/15}{(0/05)^2}$$

که با استفاده از سطح زیر منحنی نرمال خواهیم داشت:

$$n = \frac{(2/33 + 1/28)^2 \times 0/85 \times 0/15}{(0/05)^2} = 665$$

و اگر آزمون دو دامنه مورد نظر باشد با استفاده از رابطه (۶-۷) حجم نمونه عبارت خواهد شد

از:

$$n = \frac{(z_{\cdot/۹۹۵} + z_{\cdot/۹})^۲ \times \cdot/۸۵ \times \cdot/۱۵}{(\cdot/\cdot۵)^۲}$$

و با استفاده از سطح منحنی نرمال داریم:

$$n = \frac{(۲/۵۸ + ۱/۲۸)^۲ \times \cdot/۸۵ \times \cdot/۱۵}{(\cdot/\cdot۵)^۲} = ۷۶۰$$

۶-۶. آزمون مساوی بودن واریانس دو جامعه

از آنجا که در آزمون قسمت ۶-۸ شرط مساوی بودن واریانس دو جامعه از مفروضات آزمون است، در این قسمت به بیان دستور آزمون مساوی بودن واریانس دو جامعه می‌پردازیم (تنها بذکر آزمون دو دامنه مبادرت می‌گردد).

گیریم $s_۱^۲$ و $s_۲^۲$ به ترتیب برآورد واریانس صفت در دو نمونه مستقل، از دو جامعه نرمال با واریانسهای $\sigma_۱^۲$ و $\sigma_۲^۲$ باشند که حجم نمونه در آنها به ترتیب برابر $n_۱$ و $n_۲$ است. اینک اگر بخواهیم براساس اطلاعی که از واریانس صفت در این دو نمونه ($s_۱^۲$ و $s_۲^۲$) داریم درباره مساوی بودن یا نبودن واریانسهای دو جامعه ($\sigma_۱^۲$ و $\sigma_۲^۲$) اظهار نظر نماییم با آزمونی بصورت:

$$H_\cdot : \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲$$
$$H_۱ : \sigma_۱^۲ \neq \sigma_۲^۲$$

مواجه هستیم، اگر فرضیه $H_\cdot$ صحیح باشد ملاک:

$$F = \frac{s_۱^۲}{s_۲^۲} \qquad (۶-۸)$$

دارای توزیع F با درجه آزادی ($n_۱-۱$ و $n_۲-۱$) خواهد شد که در آن $n_۱ - ۱$ درجه آزادی صورت و $n_۲-۱$ درجه آزادی مخرج است و دستور این آزمون بدین ترتب خواهد بود که اگر:

$$F > F_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n_۱ - ۱, n_۲ - ۱)$$

یا (۶- ۹)

$$F < F_{\frac{\alpha}{۲}}(n_۱ - ۱, n_۲ - ۱)$$

باشد به رد فرضیه H_0 مبادرت خواهیم کرد و در غیر این صورت تسلیم فرضیه H_0 می‌شویم. لازم بتذکر است که برای توزیع F همواره رابطه زیر صادق است:

$$F_{1-\alpha}(f_1, f_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(f_2, f_1)} \qquad (۱۰-۶)$$

و بدین ترتیب در آزمون فوق کافی است که همیشه s^2 بزرگتر را در صورت یعنی بجای s_1^2 قرار داده و تنها از رابطه اول (۶-۹) استفاده کرد.

برای مثال فرض کنید جراحی می‌خواهد بداند که آیا می‌تواند واریانس استحکام دو نوع نخ جراحی را که مربوط به دو کارخانه A و B است یکی بداند یا خیر؟ جراح مزبور از کارخانه A و B به ترتیب $n_A = ۱۶$ و $n_B = ۱۱$ قطعه نخ جراحی را به عنوان نمونه انتخاب و بایک روش معینی که برای اندازه‌گیری استحکام نخ بکار می‌برد، مشاهده می‌کند که $s_A^2 = ۴$ و $s_B^2 = ۵$ است. چنانچه طبق معمول s^2 بزرگتر را در صورت کسر منظور نماییم، مقدار ملاک آزمون یعنی F برابر $\frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$ خواهد بود و اگر α برابر ۰/۰۵ انتخاب شود، عدد بحرانی که توسط رابطه اول (۶-۹) با استفاده از جدول توزیع F (شماره VI) بدست می‌آید عبارت خواهد بود از:

$$F_{۰/۹۷۵}(۱۰ \ ، ۱۵) = ۳/۰۶$$

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود مقدار ملاک آزمون (۱/۲۵) از عدد بحرانی (۳/۰۶) کوچکتر است. بنابراین جراح مذکور تسلیم فرضیه H_0 می‌شود و یکسان بودن واریانس استحکام نخهای جراحی دو کارخانه را می‌پذیرد.

۶-۷. آزمون اختلاف میانگین دو جامعه وقتی واریانس دو جامعه معلوم باشد

گیریم $\overline{X}_1$ و $\overline{X}_2$ به ترتیب میانگین صفت X در دو نمونه مستقل از دو جامعه نرمال با میانگینهای μ_1 و μ_2 و واریانس های σ_1^2 و σ_2^2 باشند و حجم نمونه به ترتیب با n_1 و n_2 نشان داده شوند. براساس این مشاهدات می‌خواهیم فرضیه «H_0» را در مقابل فرضیه «H_1» که بصورت زیر بیان می‌شوند، آزمون کنیم:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

ملاک آزمون عبارت خواهد بود از:

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (۱۱-۶)$$

گوییم اگر $z_{1-\frac{\alpha}{2}} < |z|$ باشد، یعنی قدر مطلق این ملاک از $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (عدد بحرانی) بزرگتر باشد، فرضیه H_0 را رد و در غیر این صورت براساس اطلاعات مشاهده شده نمی‌توان فرضیه H_0 را مردود شناخت.

بدیهی است چنانچه واریانس دو جامعه یکسان باشد ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) در این صورت ملاک آزمون فوق عبارت خواهد بود از:

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad (۱۲-۶)$$

برای مثال فرض کنید محققی می‌خواهد بداند که آیا می‌تواند میانگین هموگلوبین خون مردان و زنان را یکسان بداند یا خیر؟ ضمناً از تجارب گذشته کسب اطلاع می‌کند که واریانس هر دو جامعه یکسان و برابر ٤ است. برای این منظور از جامعه مردان نمونه‌ای با حجم $n_1=۱۲$ و از جامعه زنان نمونه‌ای با حجم $n_2=۸$ انتخاب می‌کند و براساس اطلاعات این دو نمونه مشاهده می‌کند که $\overline{X}_1 = ۱۳/۵$ و $\overline{X}_2 = ۱۱/۵$ است. چنانچه احتمال اشتباه نوع اول مساوی ۰/۰۵ انتخاب شود ($\alpha=۰/۰۵$) در این صورت عدد بحرانی یعنی $z_{۰/۹۷۵}$ برابر ۱/۹۶ خواهد بود. و براساس این مشاهدات ملاک آزمون از رابطه (۶-۱۲) بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$z = \frac{۱۳/۵ - ۱۱/۵}{\sqrt{٤\left(\frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۸}\right)}} = ۲/۱۹$$

چون مقدار ملاک z (۲/۱۹) از عدد بحرانی (۱/۹۶) بزرگتر است، بنابراین فرضیه H_0 یعنی یکسان بودن میانگین هموگلوبین خون جامعه مردان و زنان را مردود می‌دانیم.

آزمون فوق را می‌توان از طریق محاسبه حدود اعتماد «$\mu_1 - \mu_2$» نیز انجام داد. در این صورت وقتی می‌گوییم فرضیه H_0 مورد قبول است که حدود اعتماد مذکور صفر را شامل شود و چنانچه صفر را شامل نشود فرضیه H_0 را رد و H_1 را می‌پذیریم.

برای محاسبه حدود اعتماد «$\mu_1 - \mu_2$» به $\sigma^2_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}$ نیاز داریم که چون دو نمونه از هم

مستقل می‌باشند، واریانس $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ برابر مجموع واریانس‌های $\overline{X}_1$ و $\overline{X}_2$ می‌باشد:

$$\sigma^2_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}=\sigma^2_{\bar{X}_1}+\sigma^2_{\bar{X}_2}=\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}=\sigma^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})$$

که همان مخرج کسر فرمول (۶-۱۲) است.

حدود اعتماد «$\mu_1 - \mu_2$» برای $1-\alpha$ برابر است با :

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}}$$

که در مثال مورد بحث برای حدود اعتماد ۹۵ درصد برابر است با :

$$(13/5-11/5)\pm 1/96\sqrt{4(\frac{1}{12}+\frac{1}{8})}=2\pm 1/79$$

که چون صفر را شامل نمی‌شود، فرضیه H_0 رد و H_1 پذیرفته می‌شود.

دستور آزمون یک دامنه، یعنی آزمون فرضیه «$H_0: \mu_1=\mu_2$» در مقابل فرضیه «$H_1: \mu_1 > \mu_2$» مشابه دو دامنه است، با این تفاوت که به عنوان عدد بحرانی بجای $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ از $z_{1-\alpha}$ استفاده می‌گردد.

در اینجا به محاسبه تعداد نمونه، تنها برای حالتی که واریانس دو جامعه مساوی و نیز حجم نمونه برای دو جامعه یکسان انتخاب شود مبادرت می‌گردد. اگر واریانس مشترک را به σ^2 و حجم نمونه لازم برای هر یک از دو جامعه را به n نشان دهیم، در این صورت اگر میانگین واقعی صفت در دو جامعه به ترتیب μ_1 و μ_2 باشد، تعداد نمونه لازم که با احتمال $1-\beta$ آزمون $(H_0: \mu_1=\mu_2)$ را در سطح اشتباه α معنی‌دار نشان دهد برای آزمون یک دامنه عبارت خواهد بود از:

$$n=\frac{2(z_{1-\alpha}+z_{1-\beta})^2\times\sigma^2}{(\mu_1-\mu_2)^2} \qquad (۶-۱۳)$$

و برای آزمون دو دامنه در قیاس با رابطه (۶-۳) مقدار تقریبی n عبارت خواهد بود از:

$$n=\frac{2(z_{1-\frac{\alpha}{2}}+z_{1-\beta})^2\times\sigma^2}{(\mu_1-\mu_2)^2} \qquad (۶-۱۴)$$

برای روشن شدن مطلب فرض کنیم در مثال فوق، مربوط به مقایسه میانگین هموگلوبین خون مردان و زنان، $\mu_1 - \mu_2$ بجای صفر برابر ۱ باشد. می‌خواهیم بدانیم حجم نمونه در هر یک از دو

جامعه چقدر اختیار شود تا به احتمال ۸۰ درصد آزمون فرضیه «یکسان بودن دو میانگین» در سطح اشتباه $\alpha = ۰/۰۵$ معنی‌دار شود؟

حال اگر آزمون یک دامنه مورد نظر باشد با استفاده از رابطه (۶-۱۳) حجم نمونه برای هر یک از دو جامعه عبارت خواهد بود از:

$$n = \frac{۲(z_{۰/۹۵} + z_{۰/۸})^۲ \times ۴}{۱} = \frac{۲(۱/۶۴ + ۰/۸۴)^۲ \times ۴}{۱} = ۵۰$$

و برای آزمون دو دامنه با استفاده از رابطه (۶-۱۴) حجم نمونه برای هریک از دو جامعه عبارت خواهد بود از:

$$n = \frac{۲(z_{۰/۹۷۵} + z_{۰/۸})^۲ \times ۴}{۱} = \frac{۲(۱/۹۶ + ۰/۸۴)^۲ \times ۴}{۱} = ۶۳$$

۶-۸. آزمون اختلاف میانگین دو جامعه وقتی واریانس دو جامعه معلوم نباشد.

موارد استعمال این آزمون در پزشکی و بهداشت نسبتاً زیاد است، چه در غالب موارد محقق مایل است برابری میانگین دو جامعه را که از واریانسهای آنها اطلاعی ندارد آزمون کند. ما در اینجا دستور این آزمون را تنها برای مواردی که واریانس دو جامعه یکسان باشد ارائه می‌دهیم. میانگین صفت در دو جامعه را به ترتیب با $\mu_۱$ و $\mu_۲$ واریانس صفت را با $\sigma^۲$ نشان می‌دهیم. اگر $n_۱$ و $n_۲$ به ترتیب حجم نمونه از این دو جامعه و $\overline{X}_۱$ و $\overline{X}_۲$ به ترتیب میانگین صفت در این دو نمونه و بالاخره $s^۲_۱$ و $s^۲_۲$ به ترتیب برآورد واریانس ($\sigma^۲$) به توسط نمونه اول و دوم باشد، برای آزمون فرضیه:

$$H_۰ : \mu_۱ = \mu_۲$$

در مقابل فرضیه:

$$H_۱ : \mu_۱ \neq \mu_۲$$

ملاک آزمون عبارت است از:

$$t = \frac{\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲}{\sqrt{s_p^۲(\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲})}} \qquad (۶-۱۵)$$

که در آن $s_p^۲$ (برآورد ترکیبی واریانس[1]) از رابطهٔ زیرمحاسبه می شود :

1 Pooled estimate of variance

$$s_p^{۲} = \frac{(n_۱ - ۱)s_۱^۲ + (n_۲ - ۱)s_۲^۲}{n_۱ + n_۲ - ۲} \qquad (۱۶-۶)$$

تحت فرضیه H_0 ملاک t محاسبه شده از رابطه (۶- ۱۵) دارای توزیع t با درجه آزادی $n_۱ + n_۲ - ۲$ می‌باشد. بدین ترتیب اگر $|t| > t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n_۱ + n_۲ - ۲)$ باشد، یعنی مقدار قدر مطلق این ملاک از $t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n_۱ + n_۲ - ۲)$ (عدد بحرانی) بزرگتر باشد، فرضیه $H_۰$ را رد و در غیر این صورت گوییم براساس اطلاعات مشاهده شده نمی‌توان فرضیه $H_۰$ را مردود شناخت.

برای مثال فرض کنید محققی بخواهد بداند که آیا می‌تواند میانگین فشار خون جامعه مردان و زنان را یکی بداند یا خیر؟ بدین منظور نمونه‌هایی به حجم $n_۱ = ۱۵$ از جامعه مردان و $n_۲ = ۱۰$ از جامعه زنان انتخاب می‌کند و مشاهده می‌کند که به ترتیب $\overline{X}_۱ = ۱۲۵$ و $\overline{X}_۲ = ۱۴۰$ میلیمتر جیوه و برآورد واریانس در دو نمونه به ترتیب $s^۲_۱ = ۲۲۵$ و $s^۲_۲ = ۴۰۰$ می‌باشد. برای انجام این آزمون ابتدا یکسان بودن واریانس دو جامعه را با استفاده از ملاک F که در قسمت (۶-۶) آمده است آزمون می‌کند که در نتیجه فرضیه یکسان بودن واریانس دو جامعه رد نمی‌شود. (انجام این آزمون به عنوان تمرین به عهده دانشجو واگذار می‌گردد).

اینک با قبول فرضیه یکسان بودن واریانس دو جامعه، از ملاک t مذکور در رابطه (۶-۱۵) استفاده می شود. چنانچه احتمال اشتباه نوع اول یعنی α مساوی ۰/۰۵ انتخاب شود، با استفاده از جدول t عدد بحرانی یعنی $t_{۰/۹۷۵}(۲۳)$ برابر ۲/۰۶۹ خواهد شد و ملاک آزمون، براساس مشاهدات عبارت خواهد بود از:

$$t = \frac{۱۲۵ - ۱۴۰}{\sqrt{\frac{۲۲۵(۱۵-۱) + ۴۰۰(۱۰-۱)}{۱۵+۱۰-۲}(\frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۰})}} = -۲/۱۴$$

و چون قدر مطلق مقدار ملاک t (۲/۱۴) از عدد بحرانی (۲/۰۶۹) بزرگتر است، فرضیه $H_۰$ را مردود می‌شناسیم و قضاوت می‌کنیم که میانگین فشار خون جامعه زنان بیش از مردان است.

در این حالت هم می‌توانیم به جای انجام آزمون، به محاسبه حدود اعتماد «$\mu_۱ - \mu_۲$» با استفاده از فرمول:

$$(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲) \pm t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n_۱ + n_۲ - ۲)\sqrt{s_p^۲(\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲})}$$

اقدام کرد که در مثال مورد بحث عبارت خواهد بود از:

$$(۱۴۰ - ۱۲۵) \pm ۲/۰۶۹\sqrt{\frac{۶۷۵۰}{۲۳}(\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۱۰})} = ۱۵ \pm ۱۴/۵$$

که چون صفر را شامل نمی‌شود، فرضیه H_0 رد و H_1 پذیرفته می‌شود.

در اینجا نیز دستور آزمون یک دامنه یعنی آزمون فرضیه «$H_0 : \mu_1 = \mu_2$» در مقابل فرضیه «$H_1 : \mu_1 > \mu_2$»، مشابه دو دامنه است با این تفاوت که به عنوان عدد بحرانی $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ از $t_{1-\alpha}$ استفاده می‌شود.

در این حالت یعنی وقتی واریانس معلوم نباشد، برای محاسبه حجم نمونه به جای σ^2 از برآورد آن که بر پایه اطلاعات قبلی و نظریه کارشناسی تعیین می‌گردد، استفاده می‌شود.

۶-۹. آزمون اختلاف میانگین دو جامعه وقتی اطلاعات نتیجه مشاهدات دوتایی [1] باشند.

گیریم محققی بخواهد تاثیر دارویی را روی فشار خون سیستولیک بیماران مبتلا به فشار خون مطالعه کند. این محقق از جامعه بیماران مبتلا به فشار خون یک نمونه n تایی انتخاب می‌کند و فشار خون هر بیمار را قبل و بعد از تجویز دارو اندازه می‌گیرد. بدیهی است که اندازه فشار خون بعد و قبل از تجویز دارو برای هر بیمار از یکدیگر مستقل نمی‌باشند و در نتیجه نمی‌توان از دستورهای مذکور در قسمت ۶-۷ و ۶-۸ استفاده کرد. در این حالت به عنوان آزمون تأثیر داروی مورد نظر می‌توان اختلاف میانگین d_i ها را (d_i معرف اختلاف فشار خون قبل و بعد از تجویز دارو برای بیمار i ام می‌باشد) با صفر آزمون کرد، که در نتیجه دستور انجام این آزمون مشابه دستور قسمت ۶-۳ و ۶-۴ خواهد شد. یعنی اگر σ_d (انحراف معیار d_i) معلوم باشد، ملاک آزمون عبارت خواهد بود از:

$$z = \frac{\bar{d} - ۰}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}} \qquad (۱۷-۶)$$

و اگر مقدار آن مشخص نباشد، ملاک آزمون عبارت خواهد بود از:

$$t = \frac{\bar{d} - ۰}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \qquad (۱۸-۶)$$

که در آن:

1. Paired observation

$$s_d^2 = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1} = \frac{\sum di^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n-1}$$

چنانچه اطلاعات جدول ٦-١ مربوط به فشار خون سیستولیک قبل و بعد از تجویز دارویی برای n=۱۲ بیمار باشد خواهیم داشت:

$$\bar{d} = \frac{۱۸۰}{۱۲} = ۱۵$$

$$s_d^2 = \frac{\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}}{n-1}$$

$$s_d^2 = \frac{٧٤٠٠ - \frac{(۱۸۰)^2}{۱۲}}{۱۱} = ٤۲٧/۲۸$$

حال برای آزمون فرضیه «بی‌تاثیر بودن تجویز دارو» در مقابل فرضیه «موثر بودن دارو» به آزمون فوق مبادرت می‌شود:

از فرمول (٦-۱۸) داریم:

$$t = \frac{۱۵}{\frac{۲۰/۶۷}{\sqrt{۱۲}}} = ۲/۵۱$$

جدول ٦-١ . فشار خون سیستولیک قبل و بعد از تجویز دارو

شماره	قبل	بعد	اختلاف فشار خون	
۱	۱٤۰	۱۱۰	+۳۰	۹۰۰
۲	۱۵۰	۱٤۰	+۱۰	۱۰۰
۳	۱۸۰	۱۹۰	-۱۰	۱۰۰
٤	۱٦۰	۱۷۰	-۱۰	۱۰۰
۵	۱٤۰	۱۱۰	+۳۰	۹۰۰
٦	۱٤۰	۱۲۰	+۲۰	٤۰۰
۷	۱۵۰	۱۱۰	+٤۰	۱٦۰۰
۸	۱۷۰	۱۹۰	-۲۰	٤۰۰
۹	۱۵۰	۱۵۰	۰	۰
۱۰	۱٦۰	۱٤۰	+۲۰	٤۰۰
۱۱	۱۷۰	۱۳۰	+٤۰	۱٦۰۰
۱۲	۱۷۰	۱٤۰	+۳۰	۹۰۰
جمع	-	-	۱۸۰	٧٤۰۰

چنانچه اشتباه نوع اول یعنی α را مساوی ۰/۰۵ انتخاب کنیم، از آنجا که ملاک آزمون یعنی ۲/۵۱ از عدد بحرانی یعنی (۱۱) $t_{.975}$ که با استفاده از جدول t برابر ۲/۲۰ است، بزرگتر می‌باشد، فرضیه یکسان بودن $\bar{d}$ را با صفر مردود می‌شناسیم و می‌گوییم محقق می‌تواند فرضیه یکسان بودن میانگین فشار خون قبل و بعد از تجویز دارو را ناصحیح بداند و قضاوت کند که این دارو موجب کاهش فشار خون بیماران گردیده است. بدیهی است که در آزمون یک دامنه مطابق معمول برای ملاک آزمون بجای $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ از $t_{1-\alpha}$ استفاده می‌گردد. در مثال فوق حدود اطمینان ۹۵ درصد برای اختلاف دو میانگین عبارت خواهد بود از:

$$\bar{d} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_d^2}{n}}$$

و یا

$$۱۵ \pm ۲/۲۰ \sqrt{\frac{۴۲۷/۲۸}{۱۲}}$$

$$۱۵ \pm ۱۳/۱۳$$

و از آنجا که فاصله مربوطه یعنی (۲۸/۱۳ و ۱/۸۷) صفر را شامل نمی‌شود لذا با این روش نیز فرضیه یکسان بودن $\bar{d}$ را با صفر مردود می‌شناسیم.

۶-۱۰. آزمون اختلاف نسبت در دو جامعه

چنانچه p_1 و p_2 به ترتیب معرف نسبت صفت مورد مطالعه در جامعه اول و نسبت صفت مورد مطالعه در جامعه دوم باشند، در یک آزمون دو دامنه، که به منظور مقایسه این دو نسبت انجام می‌شود، فرضیه‌های H_0 و H_1 عبارت خواهند بود از:

$$H_0 : p_1 = p_2 = p$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

روش انجام این آزمون به توسط دو نمونه مستقل به حجم‌های n_1 از جامعه اول و n_2 از جامعه دوم که به ترتیب در x_1 و x_2 فرد صفت مورد مطالعه مشاهده شده است، بر این اساس خواهد بود که اگر فرضیه H_0 صحیح باشد طبق مطالب قسمت ۵-۵ وقتی n_1p_1 و $n_1(1-p_1)$ و نیز n_2p_2 و $n_2(1-p_2)$ از ۵ بزرگتر باشند نسبت‌های $\frac{x_1}{n_1}$ و $\frac{x_2}{n_2}$ هردو دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین p و

انحراف معیار $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ خواهند شد، بدین ترتیب مشابه دستور آزمون (۶-۸) فرضیه یکسان بودن دو نسبت:

$$H_0 : p_1 = p_2 = p$$

در مقابل فرضیه مخالف:

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

با استفاده از ملاک z که بصورت زیر است:

$$z = \frac{\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \qquad (۱۹-۶)$$

که در آن بجای p ، از برآود آن ($\hat{p}$) که بصورت زیر محاسبه می‌شود، استفاده می‌گردد:

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

در این آزمون بدلیل بزرگ بودن n_1 و n_2 همواره از ملاک z استفاده می‌شود و استفاده از ملاک t لزومی نخواهد داشت. اینک چنانچه $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ باشد، فرضیه H_0 را رد می‌کنیم. در غیر این صورت براساس اطلاعات مشاهده شده نمی‌توان فرضیه H_0 را مردود شناخت.

برای مثال فرض کنید محققی می‌خواهد بداند که آیا می‌تواند نسبت مبتلایان به بیماری تراخم را در استانی با استان دیگر یکسان بداند یا خیر؟ برای این منظور از جامعه ساکنین استان اول نمونه‌ای به حجم $n_1 = ۵۰۰$ و از ساکنین استان دوم نمونه‌ای به حجم $n_2 = ۴۰۰$ بطور تصادفی انتخاب و مشاهده می‌کند که به ترتیب تعداد مبتلایان به تراخم در دو استان مورد بحث $x_1=۶۰$ و $x_2 = ۵۰$ است. براساس این مشاهدات ملاک آزمون عبارت است از:

$$z = \frac{\frac{۶۰}{۵۰۰} - \frac{۵۰}{۴۰۰}}{\sqrt{(\frac{۱۱۰}{۹۰۰})(۱-\frac{۱۱۰}{۹۰۰})(\frac{۱}{۵۰۰} + \frac{۱}{۴۰۰})}} = -۰/۲۳$$

چنانچه احتمال اشتباه نوع اول یعنی α برابر ۰/۰۵ انتخاب شود، از آنجا که قدر مطلق مقدار ملاک آزمون یعنی ۰/۲۳ از عدد بحرانی $z_{۰/۹۷۵}$ که برابر ۱/۹۶ است، کوچکتر می‌باشد بنابراین

فرضیه H_0 را می‌پذیرد و می‌گوید براساس این مشاهدات نمی‌توان فرضیه یکسان بودن نسبت مبتلا به تراخم در این دو استان را رد کرد.

حدود اعتماد $1-\alpha$ برای $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ برابر است با :

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

که در این رابطه به جای p_1 و p_2 از برآوردهای آنها یعنی $\frac{x_1}{n_1}$ و $\frac{x_2}{n_2}$ استفاده می‌شود.

در مثال مورد بحث، حدود اعتماد ۹۵ درصد برای $p_1 - p_2$ عبارت است از:

$$(\frac{50}{400}-\frac{60}{500})\pm 1/961\sqrt{\frac{\frac{50}{400}(1-\frac{50}{400})}{400}+\frac{\frac{60}{500}(1-\frac{60}{500})}{500}}=0/005\pm 0/043$$

که چون صفر را شامل می‌شود، فرضیه H_0 رد نمی‌شود.

در این حالت حجم نمونه برای هر یک از دو گروه مقایسه در آزمون دو دامنه براساس فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$n=\frac{(z_{1-\frac{\alpha}{2}}+z_{1-\beta})^2[p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)]}{(p_1-p_2)^2} \qquad (20-6)$$

در بسیاری از کتابها در صورت کسر به جای p_1 و p_2 از متوسط آنها یعنی $\overline{P}=\frac{p_1+p_2}{2}$ استفاده شده است که در این صورت فرمول فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$n=\frac{2(z_{1-\frac{\alpha}{2}}+z_{1-\beta})^2[\overline{p}(1-\overline{p})]}{(p_1-p_2)^2} \qquad (21-6)$$

مثال زیر کاربرد این فرمول را نشان می‌دهد:

در یک مطالعه هم گروهی که در آن رابطه فعالیت‌های بدنی و انفارکتوس میوکارد بررسی می‌شود، اگر اطلاعات اولیه به شرح زیر باشد:

الف: $\alpha = 0/05$

ب: $\beta = 0/20$

ج: میزان بروز انفارکتوس میوکارد در گروهی که فعالیت‌های بدنی مطلوب دارند تقریباً برابر ۱۰ درصد است.

د: میزان بروز انفارکتوس میوکارد در گروهی که فعالیت‌های بدنی مطلوب ندارنـد تقریبـاً برابـر ۲۰درصد است.

بدین ترتیب اندازه نمونه برای هر یک از دو گروه بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{p}=\frac{p_۱+p_۲}{۲}=\frac{۰/۱+۰/۲}{۲}=۰/۱۵$$

$$n=۲\frac{(۱/۹۶+۰/۸٤)^۲(۰/۱۵\times۰/۸۵)}{(۰/۲-۰/۱)^۲}=۲۰۰$$

بنابراین باید ۲۰۰ نفر برای گروه فعالیت بدنی و ۲۰۰ نفـر را بـه عنـوان گـروه شـاهد بصـورت تصادفی از افراد سالم برای اجرای مطالعه انتخاب کرد.

٦-۱۱. آزمون تطابق نمونه با توزیع نظری[1] با استفاده از ملاک $\chi^۲$ (کای دو)[2]

چنانچه نتیجه آزمایشی به صورت k حالت مختلف از $A_۱$ تا A_k و با احتمال $p_۱$ تا p_k رخ دهد، در این صورت تعداد مورد انتظار برای هر حالـت در یـک نمونـه تصـادفی بـه حجـم n برابـر np_i می‌شود. چنانچه تعداد مشاهدات را به O_i نشان دهیم نتیجه به شرح زیر خواهد بود:

اشکال نتیجه آزمایش	$A_۱$	$A_۲$	...	A_k
احتمال هر حالت	$p_۱$	$p_۲$	...	P_k
فراوانی مورد انتظار برای هر حالت در یک نمونه nتایی	$E_۱$	$E_۲$	...	E_k
فراوانی مشاهده شده برای هر حالت	$O_۱$	$O_۲$	...	O_k

در این صورت عبارت $\sum\frac{(O_i-E_i)^۲}{E_i}$ در نمونه‌های بزرگ به سمت توزیعی بنـام $\chi^۲$ بـا درجـه آزادی ۱ − k میل خواهد کرد. غلط بودن فرضیه $H_۰$ باعث افزایش این ملاک مـی‌گـردد و در نتیجـه موقعی فرضیه $H_۰$ رد می‌شود که مقدار این ملاک در سمت راست نقطه بحرانی برای α قرار گیـرد. مقدار این ملاک در جهت رد فرضیه $H_۰$ (فرضیه $H_۰$ یعنی قابل قبول بـودن فراوانـی‌هـای مشـاهده

1. Goodness of fit
2. Chi - square

شده براساس توزیع مورد انتظار) افزایش می‌یابد و در نتیجه می‌توان براساس آن تطابق نمونـه را بـا توزیع نظری آزمون کرد. در مورد صفت پیوسته و تطابق آن با یک توزیـع نظـری دسـتور فـوق بـه صورت زیر اعمال می‌شود.

گیریم نمونه‌ای به حجم n در اختیار داشته باشیم و بـه عـلاوه k گـروه بـه فواصـل (X_1-X_2)، (X_2-X_3)، . . . ، $(X_k - X_{k+1})$ برای گروه‌بندی صفت مورد مطالعه انتخاب شـده باشـد کـه در آن $X_1 = -\infty$ و $X_{k+1} = +\infty$ است. اینک چنانچه Oi معرف فراوانی گروه iام $(X_i - X_{i+1})$ باشد، این فراوانی را که صرفاً براساس مشاهده و تجربه حاصل گردیده است، فراوانی مشاهده شده می‌نـامیم. در کنار این فراوانی، فراوانی دیگری براساس قبول فرضیه H_0 (تطابق نمونه با توزیع نظـری)، قابـل محاسبه است، که آن را فراوانی منتظره گروه iام می‌نـامیم و بـا E نشـان مـی‌دهـیم (بـرای محاسـبه فراوانی منتظره این گروه باید احتمال مربوط به فاصله $(X_i - X_{i+1})$ را که از توزیع نظـری براسـاس فرضیه H_0 محاسبه می‌شود، در n یعنی تعداد مشاهدات ضرب کرد).

در صورت صحیح بودن فرضیه H_0 و همچنین بزرگ بودن تعـداد نمونـه (بـه طـور نامحـدود) ملاک زیر :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (۶-۲۲)$$

دارای توزیعی به همین نام یعنی χ^2 با درجه آزادی :

$$df = k - 1 - m \qquad (۶-۲۳)$$

خواهد شد که در آن k معرف تعداد گروه‌ها و m معرف تعداد پارامترهـای مسـتقلی اسـت کـه توسط نمونه برای توزیع نظری برآورد شده است. در نمونه‌های با حجـم محـدود، مـلاک محاسـبه شده از رابطه (۶-۲۲) دارای توزیع تقریبی χ^2 است. محدودیت علمـی ایـن مطلـب در دنبالـه ایـن بحث خواهد آمد. اینک بـا اسـتفاده از جـدول شـماره VII مقـدار $x^2_{1-\alpha}\ (k-1-m)$ را بدسـت می‌آوریم. چنانچه ملاک χ^2 محاسـبه شـده از عـدد بحرانـی $x^2_{1-\alpha}\ (k-1-m)$ بزرگتـر باشـد، فرضیه H_0 را رد و در غیر این صورت گوئیم براساس اطلاعات مشاهده شده نمی‌تـوان فرضـیه H_0 را مردود شناخت و نمونه با توزیع نظری تطابق دارد. دستور انجام این آزمون به این دلیل بصـورت یک دامنه است که تنها، بزرگ بودن ملاک محاسبه شده از رابطه (۶-۲۲) در جهـت رد فرضـیه H_0 است. همانطور که قبلاً متذکر گردید ملاک محاسبه شده از رابطه (۶-۲۲) هنگامی دارای توزیـع χ^2

خواهد شد که تعداد نمونه و در نتیجه E_i ها به طور نامحدود بزرگ باشد. ولی در عمل کافی است فواصل گروه‌ها آنچنان انتخاب شوند که هیچ یک از فراوانی‌های نظری کمتر از ۱ نباشد و حداقل ۸۰ درصد آنها نیز بزرگتر از ۵ باشند.

مثال: اطلاعات جدول ۲-۲ را که مربوط به فشار خون سیستولیک نمونه‌ای از مردان ۳۵ ساله به بالای روستاهای شهرستان رودسر است در نظر می‌گیریم و تطابق توزیع صفت فشار خون را در این جامعه با توزیع نظری نرمال آزمون می‌کنیم. در این آزمون، فرضیه H_0 عبارت است از:

توزیع فشار خون سیستولیک در جامعه مورد مطالعه نرمال است : H_0

از آنجا که میانگین و انحراف معیار صفت مورد مطالعه در جامعه معلوم نمی‌باشد، از میانگین و انحراف معیار نمونه که به ترتیب ۱۳۳/۲۵ = $\overline{X}$ و ۲۱/۲۷ = s میلی متر جیوه است، به عنوان برآورد μ و σ استفاده می‌کنیم و با استفاده از جدول شماره IV، احتمال مربوط به هر گروه را محاسبه و آنگاه این احتمال را در جمع فراوانیها یعنی n ضرب می‌کنیم تا فراوانی منتظره هر گروه بدست آید (جدول ۶-۲).

جدول ۶-۲. محاسبه فراوانی‌های منتظره جدول ۲-۲ براساس توزیع نرمال

فشار خون	فراوانی مشاهده شده	احتمال مربوط	فراوانی منتظره
کمتر از ۹۰	۰	۰/۰۲۱۲	۱۲/۸۰
۱۰۰-۹۰	۱۵	۰/۰۳۸۲	۲۳/۰۷
۱۱۰-۱۰۰	۵۷	۰/۰۷۸۵	۴۷/۴۱
۱۲۰-۱۱۰	۸۲	۰/۱۲۹۷	۷۸/۳۴
۱۳۰-۱۲۰	۱۵۵	۰/۱۷۲۸	۱۰۴/۳۷
۱۴۰-۱۳۰	۱۰۵	۰/۱۸۵۱	۱۱۱/۸۰
۱۵۰-۱۴۰	۸۶	۰/۱۵۹۷	۹۶/۴۶
۱۶۰-۱۵۰	۳۳	۰/۱۱۱۰	۶۷/۰۴
۱۷۰-۱۶۰	۲۹	۰/۰۶۲۰	۳۷/۴۵
۱۸۰-۱۷۰	۲۱	۰/۰۲۷۹	۱۶/۸۵
۱۹۰-۱۸۰	۵	۰/۰۱۰۱	۶/۱۰
۲۰۰-۱۹۰	۱۶	۰/۰۰۲۸	۱/۷۰
+۲۰۰	۰	۰/۰۰۱۰	۰/۶۱
جمع	۶۰۴	۱	۶۰۴

و چون فراوانی منتظره گروه آخر از عدد ۱ کمتر است، گروه آخر و ماقبل آخر را در یکدیگر ادغام می‌کنیم که در نتیجه فراوانی مشاهده شده و فراوانی منتظره آن به ترتیب برابر ۱۶ و ۲/۳۱ خواهد شد. حال اگر فرضیه H_0 صحیح باشد، ملاک:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

دارای توزیع χ^2 با درجه آزادی $(k-1-m)$ خواهد شد. در این مثال چون دو پارامتر μ و σ توسط نمونه یعنی $\overline{X}$ و s برآورد شده است، بنابراین m برابر با ۲ خواهد شد. با استفاده از جدول ۶-۲ برای محاسبه ملاک χ^2 فوق خواهیم داشت:

$$\chi^2 = \frac{(۰ - ۱۲/۸)^2}{۱۲/۸} + \frac{(۱۵ - ۲۳/۰۷)^2}{۲۳/۰۷} + \frac{(۵۷ - ۴۷/۴۱)^2}{۴۷/۴۱} + \ldots + \frac{(۱۶ - ۲/۳۱)^2}{۲/۳۱} = ۱۴۵/۳۷$$

چنانچه احتمال اشتباه نوع اول یعنی $\alpha = ۰/۰۱$ انتخاب شود، دراین صورت با مراجعه به جدول شماره VII عدد بحرانی یعنی $\chi^2_{1-\alpha}(k-1-m)$ و یا $\chi^2_{۰/۹۹}(۱۲-۱-۲)$ عبارت از ۲۱/۶۷ خواهد بود که چون ملاک محاسبه شده (۱۴۵/۳۷) از عدد بحرانی (۲۱/۶۷) بزرگتر است، فرضیه H_0 را مردود می‌شناسیم و قضاوت می‌کنیم که توزیع فشار خون در جامعه مورد مطالعه از نوع توزیع نرمال نیست.

۶-۱۲. آزمون نسبت دو جامعه وقتی اطلاعات نتیجه مشاهدات دوتایی باشد.[1]

چنانچه در مثال ۶. ۹ متغیر مورد مطالعه از نوع کیفی باشد، مثلاً به جای تأثیر دارو بر فشار خون سیتولیک تأثیر دارو بر سردرد بیماران (عارضهٔ دارو) مورد نظر باشد در اینصورت می توان اطلاعات را به صورت جدول زیر نوشت.

سردرد قبل از درمان	سردرد بعد از درمان	
	آری	خیر
آری	a	b
خیر	c	d

1. Mc Nemar - test

چنانچه دراین جدول متشابهات (a وd) را کنار بگذاریم و احتمال حدوث غیرمتشابهات (b وc) را براساس فرضیهٔ $H_\circ$ مساوی و برابر $\frac{۱}{۲}$ بدانیم طبق فرمول (۶-۵) خواهیم داشت:

$$z = \frac{\frac{b}{b+c} - \frac{۱}{۲}}{\sqrt{\frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}}{b+c}}} = \frac{b-c}{\sqrt{b+c}} \qquad (۶-۲۴)$$

آنگاه براساس مقدار z می توان در مورد فرضیهٔ بی تأثیر بودن دارو و یا درمان تصمیم گرفت. استفاده از مجذور z به عنوان $\chi^۲$ با یک درجه آزادی نیز متداول است که در این صورت خواهیم داشت :

$$\chi^۲ = \frac{(b-c)^۲}{b+c} \qquad (۶-۲۵)$$

بعضی از مؤلفین فرمول فوق را با درنظرگرفتن تصحیح پیوستگی یتس[1] به شرح زیر ارائه کرده‌اند:

$$\chi^۲ = \frac{(|b-c|-۱)^۲}{b+c}$$

مهمترین کاربرد مشاهدات دوتایی برای یک صفت کیفی در مطالعات مورد- شاهدی است که در آن بیماران وغیربیماران از لحاظ مواجهه داشتن با یک صفت خاص مورد مقایسه قرار می گیرند. در این مطالعات به ازای هر فرد بیمار یک فرد به عنوان کنترل انتخاب می شود به طوری که این فرد غیر از صفت مورد بررسی تاحد ممکن از سایر جهات مشابه فرد مورد (بیمار) باشد. جدول ۶-۳ نتایج مطالعهٔ ۱۰۰ دوتایی جور شده[2] از بیمار و شاهد از لحاظ مواجهه با عامل خطر را نشان می دهد.

1. Yates continuity correction
2. Matched

جدول ٦-۳. بررسی ۱۰۰ دوتایی جور شده از لحاظ مواجهه با عامل خطر

بیمار	کنترل		جمع
	مواجهه دارد	مواجهه ندارد	
مواجهه دارد	a =۵۹	b =۲۳	۸۲
مواجهه ندارد	c =۸	d =۱۰	۱۸
جمع	٦۷	۳۳	n =۱۰۰

در ۵۹ زوج هم بیمار و هم شاهد با عامل خطر مواجهه داشته اند. در ۱۰ زوج هیچ یک از دو فرد با عامل خطر مواجهه نداشته اند. در ۲۳ زوج بیمار مواجهه داشته و کنترل مواجهه نداشته است و بالاخره در ۸ زوج کنترل مواجهه داشته و بیمار مواجهه نداشته است. به طوری که مشاهده می شود تعداد بیشتری از بیماران نسبت به کنترل ها در معرض مواجهه بوده اند. برای مقایسهٔ تأثیر مواجهه با عامل خطر در ابتلا به بیماری می توان از روش $\chi^۲$ مک نمار به صورت زیر استفاده کرد.

$$\chi^{۲} = \frac{(b-c)^{۲}}{b+c} = \frac{(۲۳-۸)^{۲}}{۲۳+۸} = ۷/۲٦$$

که در مقایسه با توزیع $\chi^۲$ با یک درجه آزادی فرضیهٔ بی تأثیر بودن مواجهه رد می شود و اختلاف در سطح ۰/۰۱ نیز معنی دار است. به عبارت دیگر مقدار p کمتر از ۰/۰۱ است ($p<۰/۰۱$).

p-value .۱۳-٦

در آزمونهای فرضیه، وقتی ملاک آزمون برای α معینی (مثلاً ۰/۰۵) در منطقه بحرانی قرار بگیرد مناسب است تنها به ذکر رد شدن فرضیه $H_۰$ اکتفا نگردد. بلکه براساس ملاک بدست آمده احتمال وجود اختلافی در حد مشاهده یا بیشتر از آن را به شرط صحیح بودن فرضیه $H_۰$ با استفاده از جدول مربوطه محاسبه کرد. اندازه این احتمال را مقدار p (p-value) گویند که در مقالات مختلف تحت همین نام آمده است.

برای مثال اگر در آزمونی که از ملاک z استفاده می‌شود، مقدار z برابر ۲/۱ باشد، با مراجعه به سطر آخر جدول V در قسمت پیوست معلوم می شود که در آزمون دو دامنه اندازه p برای z =۱/۹٦۰

معادل ۰/۰۵ و برای $z = ۲/۳۲۶$ برابر ۰/۰۲ می‌باشد. اینک با توجه به اینکه ۲/۱ بین دو عدد ۱/۹۶۰ و ۲/۳۲۶ قراردارد یعنی $۰/۰۲ < p < ۰/۰۵$ قرار می‌گیرد. اندازه دقیق بـرای ایـن شـاخص بـا اسـتفاده از جدول IV برابر ۰/۰۳۵۸ است که این عدد را مقدار p می‌نامند.

۶-۱۴. آزمون‌های بدون پارامتر[1] مرتبط با این فصل

۶-۱۴-۱. مقدمه

آزمون‌های بدون پارامتر آزمون‌هـایی اسـت کـه در آنهـا بـرخلاف آزمـون‌هـای پارامتریـک بـه مفروضاتی از قبیل نرمال بودن توزیع و یا مساوی بودن واریانس‌ها حساس نمـی‌باشـد. بـه عبـارت دیگر کاربرد این آزمون‌ها بر پایه هر نوع توزیعی مجاز می‌باشد به همین دلیل اینگونـه آزمـون‌هـا را آزمون‌های برمبنای توزیع آزاد نیز می‌نامند. بنابراین در مواردی که مفروضات آزمون‌های پارامتریک با اشکال مواجه است، می‌توان اینگونه آزمون‌ها را جانشین آزمون‌های پارامتریک کرد.

در شرایطی که توزیع صفت در جامعه مشخص نباشد و یـا داده‌هـا از نـوع رتبـه‌ای باشـد لازم است از آزمونهای بدون پارامتر استفاده شود. در شرایطی که امکان اسـتفاده از هـر دو نـوع آزمـون یعنی با و بدون پارامتر فراهم است آزمونهای پارامتریک دارای توان بیشتر نسبت به آزمونهای بدون پارامتر می‌باشند.

مهمترین این آزمون‌ها که مترادف با آزمون‌هـای پارامتریـک ذکـر شـده در ایـن فصـل هسـتند، عبارتند از:

۶-۱۴-۲. آزمون من- ویتنی- ویلکاکسون[2] برای دو نمونه مستقل

این آزمون مانند آزمون اختلاف دو میانگین در قسمتهای ۶-۷ و ۶-۸ مـی‌باشـد منتهـا در اینجـا فرض نرمال بودن توزیع متغیر در دو جامعه مورد مطالعه ضروری نمی‌باشد. در این آزمون که برای مقایسه مشخص کننده و یا مشخص کننده‌هـای مرکـزی و یـا بـه عبـارت دیگـر مقایسـه موقعیـت مکانی(مانند میانگین یا میانه) دو توزیع به کار می‌رود، اطلاعات مربوط به نمونه n_1 از جامعه اول و n_2 از جامعه دوم ترکیب می‌شوند و به صـورت صـعودی یـا نزولـی مرتـب مـی‌گردنـد آنگـاه بـه اندازه‌های مرتب شده رتبه ۱، ۲، ... ، n که $n = n_1 + n_2$ اختصاص می‌یابد و در مواردی کـه رتبـه تکرار شود، میانگین رتبه برای رتبه‌های مشابه منظور می‌گردد. ملاک مورد استفاده برای انجـام ایـن

1. Nonparametric
2. Mann- Whitney- Wilcoxon

آزمون، χ^2 با درجه آزادی یک به شرح زیر می‌باشد:

$$\chi^2 = \frac{12 n_1 n_2 (\overline{R}_1 - \overline{R}_2)^2}{n^2 (n+1)} \qquad (۲۶-۶)$$

که در آن $\overline{R}_1$ و $\overline{R}_2$ میانگین رتبه‌های گروه اول و دوم می‌باشند.

در مواردی که تعداد رتبه‌های مشابه زیاد باشد لازم است مقدار χ^2 محاسبه شده را بر عامل تصحیح زیر تقسیم کرد:

$$f = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{t} t_i (t_i - 1)(t_i + 1)}{n(n-1)(n+1)} \qquad (۲۷-۶)$$

که در آن t_1 تعداد رتبه‌های مشابه در مقدار اول و t_2 تعداد رتبه‌های مشابه در مقدار دوم و به همین ترتیب t_i تعداد رتبه‌های مشابه در مقدار i ام و t تعداد مقادیری است که در آنها تکرار رخ داده است.

مثال: اطلاعات جدول ٦-٤ مربوط به اندازه لیزو آنزیم شیره معده در دو گروه از بیماران است که براساس مقدار اصلی و رتبه (داخل پرانتز) نشان داده شده است:

جدول ٦-٤. سطح لیزوآنزیم در دو گروه از بیماران

گروه اول (n_1 =۲۹)		گروه دوم (n_2=۳۰)	
۱۰/٤ (۳۹)	۰/۲(۱/٥)	٥/٤ (۲۹)	۰/۲ (۱/٥)
۱۰/۹ (٤۰)	۰/۳ (۳/٥)	٥/۷ (۳۰)	۰/۳ (۳/٥)
۱۱/۳ (٤۱)	۰/٤ (٥/٥)	٥/۸ (۳۱)	۰/٤ (٥/٥)
۱۲/٤ (٤۲)	۱/۱ (۸)	۷/٥ (۳۲/٥)	۰/۷ (۷)
۱٦/۲ (٤٥)	۲/۰ (۱۳/٥)	۸/۷ (۳٤)	۱/۲ (۹)
۱۷/٦ (٤۸)	۲/۱ (۱٥)	۸/۸ (۳٥)	۱/٥ (۱۰/٥)
۱۸/۹ (٤۹)	۳/۳ (۱۹)	۹/۱ (۳٦)	۱/٥ (۱۰/٥)
۲۰/۷ (٥۱/٥)	۳/۸ (۲۱)	۱۰/۳ (۳۸)	۱/۹ (۱۲)
۲٤/۰ (٥۳)	٤/٥ (۲۲)	۱٥/٦ (٤۳)	۲/۰ (۱۳/٥)
۲٥/٤ (٥٤)	٤/۸ (۲٤)	۱٦/۱ (٤٤)	۲/٤ (۱٦)
٤۰/۰ (٥٦)	٤/۹ (۲٦)	۱٦/٥ (٤٦)	۲/٥ (۱۷)
٤۲/۲ (٥۷)	٥/۰ (۲۷)	۱٦/۷ (٤۷)	۲/۸ (۱۸)
٥۰/۰ (٥۸)	٥/۳ (۲۸)	۲۰/۰ (٥۰)	۳/٦ (۲۰)
٦۰/۰ (٥۹)	۷/٥ (۳۲/٥)	۲۰/۷ (٥۱/٥)	٤/۸ (۲٤)
	۹/۸ (۳۷)	۳۳/۰ (٥٥)	٤/۸ (۲٤)
میانگین رتبه = ۳۳/٦٥٥۲		میانگین رتبه = ۲٦/٤٦٦۷	

در این مثال برای نمونه رتبه ۱/۵ مربوط به تکرار کمترین مقدار یعنی ۰/۲ در دوبار می‌باشد. با توجه به اینکه رتبه‌های ۱ و ۲ به این دوبار تکرار تعلق می‌گیرد، میانگین ۱ و ۲ یعنی ۱/۵ برای عدد ۰/۲ در نظر گرفته شده است و یا رتبه ۳/۵ مربوط به عدد ۰/۳ است که مجدداً دوبار تکرار شده است و رتبه‌های آن برابر ۳ و ٤ است که میانگین برابر ۳/۵ است. با توجه به توضیحات فوق اندازه χ^2 و f به ترتیب برابر است با :

$$\chi^{۲} = \frac{۱۲ \times ۲۹ \times ۳۰ \times (۳۳/٦۵۵۲ - ۲٦/٤٦٦۷)^{۲}}{۵۹^{۲} \times ٦۰} = ۲/۵۸$$

$$f = ۱ - \frac{٦٦}{۲۰۵۳۲۰} = ۰/۹۹۹۷$$

اعمال این تصحیح به دلیل نزدیک بودن آن به عدد یک بر χ^2 تاثیر قابل ملاحظه‌ای نمی‌گذارد لذا چون χ^2 حاصل یعنی ۲/۵۸ از χ^2 جدول با یک درجه آزادی و سطح معنی‌داری ۰/۰۵ کمتر است، فرضیه یکسان بودن دو توزیع رد نمی‌شود و نمی‌توان گفت شاخصهای مرکزی (مانند میانه اندازه لیزوآنزیم) در دو توزیع متفاوت است.

چنانچه n_1 و n_2 کوچک باشد (کمتر از ۱۰) استفاده از فرمول فوق توصیه نمی‌شود. برای اطلاع از جداول مناسب برای این شرایط به کتابهای اختصاصی ناپارامتری مراجعه گردد.

٦-١٤-٣. آزمون رتبه علامت دار ویلکاکسون[1] برای دو نمونه وابسته

از این آزمون ناپارامتریک موقعی استفاده می‌شود که اطلاعات به صورت جفت یا دو به دو باشند. در این حالت ابتدا اختلاف زوج‌ها محاسبه می‌شود آنگاه اختلاف‌ها بدون در نظر گرفتن علامت از کم به زیاد و یا برعکس مرتب شده و به آنها رتبه یک به بالا داده می‌شود. آنگاه علامت‌ها به رتبه‌ها بازگردانده می‌شود. چنانچه T معرف جمع رتبه‌های علامت + باشد خواهیم داشت:

$$z = \frac{T - n(n+۱)/٤}{\sqrt{n(n+۱)(۲n+۱)/۲٤}} \qquad (۲۸-٦)$$

از فرمول فوق موقعی می‌توان استفاده کرد که تعداد زوج‌ها حداقل ۱۵ باشد.

1. Wilcoxon signed rank test

مثال: اطلاعات زیر مربوط به یک مطالعه مورد - شاهدی جور شده در مورد استفاده از قرص‌های ضدحاملگی و سرطان پستان می‌باشد. در این مطالعه ۱٦ زن که دارای سرطان پستان بودند با ۱٦ زن که سرطان پستان نداشتند از نظر سن و طبقه اقتصادی ـ اجتماعی جور شدند و از آنها درباره مدت استفاده از قرص‌های ضد حاملگی سئوال شده و نتیجه به شرح جدول ٦-۵ می باشد:

جدول ٦-۵. ماههای استفاده از قرص‌های ضد حاملگی

شماره زوج جورشده	مورد	شاهد	اختلاف	شماره زوج جورشده	مورد	شاهد	اختلاف
۱	۲/۰	۱/۵	۰/۵	۹	۱۲/۱	۷/٦	٤/۵
۲	۱۰/۰	۹/۱	۰/۹	۱۰	۱۵/۰	۹/۰	٦/۰
۳	۷/۱	۸/۱	-۱/۰	۱۱	۱٦/۰	۱۷/۰	-۱/۰
٤	۲/۳	۱/۵	۰/۸	۱۲	۸/۰	۷/۵	۰/۵
۵	۳/۰	۳/۱	-۰/۱	۱۳	۱/۱	۱/۰	۰/۱
٦	٤/۱	۵/۲	-۱/۱	۱٤	۱۰/۰	۱۰/۲	-۰/۲
۷	۱۰/۰	۱/۰	۹/۰	۱۵	۷/۱	۷/۳	-۰/۲
۸	۱۰/۵	۹/٦	۰/۹	۱٦	۲۰/۰	۱۸/۰	۲/۰

براساس جدول فوق ۱٦ اختلاف بدست آمده بدون در نظرگرفتن علامت عبارتند از:

۰/۵، ۰/۹، ۱/۰، ۰/۸، ۰/۱، ۱/۱، ۹/۰، ۰/۹، ٤/۵، ٦/۰، ۱/۰، ۰/۵، ۰/۱، ۰/۲، ۰/۲، ۲/۰

که پس از مرتب کردن و دادن رتبه خواهیم داشت:

۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۲	۰/۵	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹	۱/۰	۱/۰	۱/۱	۲/۰	٤/۵	٦/۰	۹/۰
۱/۵	۱/۵	۳/۵	۳/۵	۵/۵	۵/۵	۷	۸/۵	۸/۵	۱۰/۵	۱۰/۵	۱۲	۱۳	۱٤	۱۵	۱٦

حال پس از بازگرداندن علامت‌ها خواهیم داشت:

۱/۵- و ۱/۵ و ۳/۵- و ۳/۵- و ۵/۵ و ۵/۵ و ۷ و ۸/۵ و ۸/۵ و ۱۰/۵ - ۱۰/۵- و ۱۲- و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶

در این صورت T یعنی جمع رتبه‌های مثبت برابر با ۹٤/۵ و با در نظر گرفتن n=۱٦ و با استفاده از رابطه (٦-۲۸) خواهیم داشت:

$$z = \frac{۹٤/۵ - ٦۸}{۱۹/۳٤} = ۱/۳۷$$

بنابراین با توجه به اینکه z محاسبه شده کوچکتر از ۱/۹٦ = $z_{۰/۹۷۵}$ می‌باشد فرضیه $H_۰$ رد نمی‌شود به عبارت دیگر دو گروه کنترل و مورد از نظر میانه مصرف قرص‌های ضد حاملگی اختلاف معنی‌داری را نشان نمی‌دهند.

تمرین

۱. میانگین و انحراف معیار نمره هوش کودکانی که در منطقه A سکونت دارند به ترتیب برابر ۸۰ و ۷ است. ۲۵ کودک را بطور تصادفی از ساکنین منطقه B اختیار و تحت همان آزمایش هوش قرار می‌دهیم و مشاهده می‌کنیم که میانگین نمره هوش این کودکان برابر ۸۳ می‌شود. آیا می‌توان فرضیه عدم تاثیر منطقه را روی نتیجه آزمایش هوش مردود شناخت؟ (فرض یکسان بودن واریانس در این دو جامعه پذیرفته شده است)

۲. میانگین و انحراف معیار وزنه‌هایی که نخ‌های جراحی ساخت کارخانه A تحمل می‌کنند به ترتیب برابر ۱۲/۳ و ۱/٤ کیلوگرم است. مسئولین کارخانه B که نخ‌های گرانتری ارائه می‌کنند ادعا دارند که استحکام نخهایشان ازکارخانه A بیشتر است. مدیر یک بیمارستان هنگامی به خرید نخ جراحی از کارخانه B تصمیم می‌گیرد که میانگین استحکام نخ‌های این کارخانه حداقل ۰/۵ کیلوگرم از کارخانه A بیشتر باشد. یعنی فرضیه «$H_0 : \mu \leq ۱۲/۳ + ۰/۵$» در سطح اشتباه $\alpha=۰/۰۵$ رد شود. بدین منظور ١٦ قطعه از نخهای کارخانه B به طور تصادفی انتخاب و مشاهده می‌کند که میانگین استحکام نخهای انتخاب شده برابر ۱۳ کیلوگرم است. آیا مدیر بیمارستان تصمیم به خرید نخ جراحی از کارخانه B خواهد گرفت؟ (واریانس استحکام نخ را در هر دو کارخانه مساوی فرض کنید).

۳. میانگین وزن مردان در جامعه‌ای برابر ۷۰ کیلوگرم است. یک نمونه تصادفی به حجم ۵۰ نفر از جامعه زنان انتخاب و مشاهده می‌شوند که میانگین و انحراف معیار وزن این افراد به ترتیب برابر ٦٤ و ۵ کیلوگرم است آیا می‌توان برای این جامعه فرضیه یکسان بودن میانگین وزن زنها را با مردها مردود شناخت؟

٤. اگر اعداد ۱۲٤، ۱۱۰، ۱۱٤، ۱۰۰، ۹۰، ۱۳۰، ۱۳۰، ۱۱۰، ۱۲۰ و ۱۲۰ فشار خون سیستولیک (میلی لیتر جیوه) نمونه‌ای به حجم ۱۰ نفر از جامعه‌ای باشد. آیا می‌توان میانگین فشار خون سیستولیک این جامعه را عدد ۱۱۰ دانست؟

٥. اگر ۸۲ = $\overline{X}$ و ۱۵ = σ باشد فرضیه ۸٦ = μ را یک بار برای ۱۰۰ = n و بار دیگر برای n=۲۵ آزمون کنید.

٦. اگر نسبت صفتی در یک نمونه تصادفی به حجم ۹۰۰ = n برابر ۰/۳۰ باشد، فرضیه مساوی بودن نسبت صفت مورد مطالعه را در جامعه با عدد ثابت $\frac{۱}{۳}$ را آزمون کنید.

٧. تجربیات گذشته گویای این مطلب است، که حدود ٤۰ درصد از بیمارانی که از نوعی سرطان رنج می‌برند، با تکنیک جراحی A بهبودی نسبی می‌یابند. محققی تکنیک جدیدی را پیشنهاد کرده و مدعی است که کاربرد تکنیک جدید احتمال بهبودی را افزایش می‌دهد. اینک ۱۱۰ بیمار مبتلا به همان نوع سرطان، تحت عمل جراحی با تکنیک B قرار گرفته و ملاحظه شد که ۵۰ نفر از آنها بهبودی حاصل کردند درباره ادعای محقق نظر دهید.

٨. اگر غلظت معینی از یک حشره کش موجب مرگ ۵۰ درصد از پشه‌های مورد آزمایش شود و ما ۲۰۰ حشره را با حشره کش دیگری با همان غلظت مورد آزمایش قرار دهیم و ملاحظه کنیم که ۱۲۰ حشره کشته می‌شود، آیا می‌توان در این غلظت حشره کش دوم را از حشره کش اول مؤثرتر دانست؟

۹. از ۵۰۰ طفلی که در یک بیمارستان به دنیا آمده‌اند ۲۷۰ نفر آنها پسر است. آیا می‌توان نسبت نوزاد پسر را با دختر یکسان دانست؟

۱۰. آزمون فرضیه « $\sigma^۲_۱ = \sigma^۲_۲$ » را برای اطلاعات زیر انجام دهید:

الف: $\alpha = ۰/۰۵$ و $s^۲_۲ = ۱٦$ و $s^۲_۱ = ۵۰$ و $n_۱ = n_۲ = ۱٦$

ب: α = ۰/۰۱ و s_2^2 =۶/۳ و s_1^2 =۱۵/۶ و n_2=۱۲ و n_1 =۴۱

ج: α = ۰/۰۲ و s_2^2 =۱۷ و s_1^2 =۸ و n_2=۱۲۰ و n_1 =۶۰

۱۱. واریانس اندازه‌های یک فاکتور خونی در ۸ بار آزمایش با تکنیک A برابر ۲٤/۲ و با تکنیک B برابر ۳۷/۳ بدست آمده است. آیا می‌توان واریانس اندازه‌های حاصل از این دو تکنیک را یکسان دانست؟

۱۲. میانگین و انحراف معیار برای نمونه‌ای به حجم n=۲۰ به ترتیب برابر ٤۲ و ۵ بدست آمده است. اگر توزیع متغیر x نرمال باشد، فرضیه μ = ٤٤ را آزمون کنید.

۱۳. از دو جامعه نرمال به ترتیب نمونه‌هایی به حجم n_1 = ۱۰ و n_2 = ۱۲ انتخاب و مشاهده می‌شود که $\overline{X}_1$=۲۰ و $\overline{X}_2$ =۲٤ و s_1=۵ و s_2=٦ است فرضیه $\mu_1 = \mu_2$ را ضمن انجام آزمون مساوی بودن واریانسها، آزمون کنید.

۱٤. چنانچه میانگین و انحراف معیار زمان سیلان خون افراد نرمال به ترتیب μ = ۱/٤۰۷ و σ=۰/۵۵۸ ثانیه باشد و در آزمایشی زمان سیلان خون سه نفر که به بیماری خاصی مبتلا هستند برابر اعداد ۱/۷۵، ۱/۷۵ و ۲/۵۰ ثانیه بدست آمده باشد، درباره بستگی زمان سیلان خون و بیماری مورد نظر بحث کنید.

۱۵. ۱۰۰ کودک را به طور تصادفی به دو گروه تقسیم کردیم. گروه اول را تحت رژیم خاصی قرار دادیم و گروه دوم را به عنوان شاهد با رژیم معمولی تغذیه کردیم. بعد از ۳ ماه مشاهده گردید که میانگین اضافه وزن برای گروه آزمایش برابر ۳ کیلوگرم و برای گروه شاهد برابر ۲/۵ کیلوگرم است. چنانچه انحراف معیار اضافه وزن در این مدت برای هردو گروه $\sigma_1 = \sigma_2$=۱ کیلوگرم باشد، آیا می‌توان تاثیر این رژیم را در افزایش وزن با تاثیر رژیم معمولی یکسان دانست؟ چنانچه اختلاف واقعی میانگین اضافه وزن برابر ۰/۵ کیلوگرم باشد، حجم نمونه چقدر انتخاب شود تا بااحتمال ۸۵ درصد بتوان فرضیه $H_0: \mu_1 = \mu_2$ را در سطح اشتباه α = ۰/۰۵ مردود شناخت؟

۱٦. اگر اطلاعات زیر مربوط به درجه حرارت دهان ورکتوم ۹ فرد باشد:

شماره فرد	درجه حرارت دهان	درجه حرارت رکتوم
۱	۳۷/٤	۳۷/۸
۲	۳۷/۳	۳۷/۷
۳	۳۷/۱	۳۸/٤
٤	۳۷/۸	۳۸/۲
٥	۳۷/٤	۳۷/۸
٦	۳۷/۱	۳۷/۳
۷	۳۷/۷	۳۷/۹
۸	۳۷/۷	۳۷/۷
۹	۳۷/۳	۳۷/۷

الف: آیا میانگین درجه حرارت دهان با میانگین درجه حرارت رکتوم یکسان است؟

ب: آیا می‌توان میانگین درجه حرارت دهان را با عدد ۳۷ برابر دانست؟

۱۷. اگر اطلاعات زیر مربوط به شمارش کلونی‌های میکروبی در ۱۲ بشقاب بوسیله دو تکنیسین باشد، آیا برای $\alpha = ۰/۰۱$ اختلاف معنی‌داری بین میانگین شمارش این دو تکنسین وجود دارد؟

شماره بشقاب	تکنسین ۱	تکنسین ۲
۱	۱۳۹	۱۹۱
۲	۱۲۱	۱۸۱
۳	٤۹	٦۷
٤	۱٦۳	۱٤۳
٥	۱۹۱	۲۳٤
٦	٦۱	۸۰
۷	۱۷۹	۲٥۰
۸	۲۱۸	۲۳۹
۹	۲۹۷	۲۸۹
۱۰	۱٦٥	۲۰۱
۱۱	۹۱	۸۰
۱۲	۹۲	۹۹

۱۸. ۲۰ موش آزمایشگاهی را که دو به دو از یک نسل می‌باشند به دو گروه ۱۰تایی بدین ترتیب تقسیم می‌کنیم که از هر دو موش متعلق به یک نسل یکی درگروه اول و دیگری در گروه دوم قرار گیرد. گروه اول تحت رژیم نرمال و گروه دوم تحت رژیمی که فاقد ویتامین E است قرار می‌گیرد. بعد از مدتی برای هر یک از ۱۰ زوج موش مورد مطالعه، تفاضل مقدار ویتامین A موجود در کبد دو موش مربوط به آن نسل، اندازه‌گیری می‌شود (به صورت جبری) و مشاهده می‌گردد که میانگین و انحراف معیار این تفاضل‌ها به ترتیب برابر ۸۰۵ و ۵۲۹ واحد بین‌المللی است. درباره بستگی ویتامین E در رژیم غذایی و ویتامین A موجود در کبد موش‌ها بحث کنید.

۱۹. به منظور بررسی تاثیر واکسن معینی در پیشگیری از بیماری مربوط به آن، ۸۲۸ کودک به طور تصادفی به دو گروه تقسیم گردید. گروه اول که شامل ۵٤۰ کودک بود واکسینه شدند و گروه دوم که شامل ۲۸۸ کودک بود به عنوان گروه شاهد در نظر گرفته شد. از گروه واکسینه شدگان ۱٤۱ کودک و از گروه شاهد ۱۲۹ کودک به بیماری مورد مطالعه مبتلا شدند. درباره تأثیر واکسیناسیون بحث کنید.

۲۰. در صورتی که اطلاعات مساله ۱۹ مربوط به مطالعه‌ای از نوع مقطعی باشد، یعنی در جمع‌آوری اطلاعات از کودکان یک منطقه مشاهده گردد که از ۲۷۰ کودک بیمار ۱٤۱ کودک و از ۵۵۸ کودک سالم ۳۹۹ کودک واکسینه شده بود، به سوال مساله فوق پاسخ دهید.

۲۱. محققی برای اینکه تأثیر دارویی را روی بیماری معینی آزمایش کند یکصد بیمار را به صورت تصادفی به دو گروه ۵۰تایی تقسیم کرد. به یک گروه داروی مورد نظر، و به گروه دیگر ماده‌ای که از نظر رنگ، بو و مزه شبیه داروی مورد نظر بود ولی در واقع ماده خنثی محسوب می‌گردد (Placebo) تجویز نمود و ملاحظه کرد که از گروه اول ۳۰ نفر و از گروه دوم ۲٤ نفر بهبودی حاصل نمودند. درباره تأثیر این دارو روی بیماری مورد نظر بحث کنید.

۲۲. اگر اطلاعات زیر مربوط به Cardiac Index[1] یک نمونه تصادفی ۱۱۲ نفری از یک جامعه

۱. این شاخص از تقسیم بازده قلب (لیتر در دقیقه) بر سطح بدن (متر مربع) حاصل می‌گردد.

باشد، تطابق این نمونه را باتوزیع نظری نرمال برای $\alpha=$ ۰/۰۵ آزمون کنید (این آزمون را یک بار به فرض اینکه مقادیر μ و σ به ترتیب برابر ۲/٤۵ و ۱/۷٤ است و بار دیگر به فرض اینکه مقادیر مذکور برآوردهای μ و σ، براساس همین اطلاعات هستند انجام دهید).

Cardiac Index	n_i
کمتر از ۰/۵	۱
۰/۵- ۱	۹
۱ – ۱/۵	۲۳
۱/۵ – ۲	۱۷
۲ – ۲/۵	۱۳
۲/۵ – ۳	۱۲
۳ – ۳/۵	۱۰
۳/۵ – ٤	۹
٤ – ٤/۵	۹
٤/۵ – ۵	۳
۵ +	٦
جمع	۱۱۲

۲۳. اطلاعات زیر مربوط به هموگلوبین خون (گرم درصد سانتیمتر مکعب) یک نمونه صد نفری از یک جامعه است. فرضیه تطابق این نمونه را با توزیع نظری نرمال آزمون کنید.

هموگلوبین	فراوانی
۸-۹	۸
۹-۱۰	۹
۱۰-۱۱	۱٦
۱۱-۱۲	۲۳
۱۲-۱۳	۲۱
۱۳-۱٤	۱۵
۱٤-۱۵	۸
جمع	۱۰۰

۲٤. در پرتاب ۱٤۰ بار سکه‌ای مشاهده می‌گردد که ٦۰ بار روی شیرظاهر می‌شود. آیا می‌توان احتمال ظاهر شدن روی شیر را $\frac{1}{2}$ دانست؟

۲۵. در پرتاب ٦۰ بار یک تاس مشاهده می‌شود که روهای مختلف تاس به صورت زیر ظاهر می‌گردد.

روهای مختلف	فراوانی
۱	۱۵
۲	۷
۳	٤
٤	۱۱
۵	٦
٦	۱۷
جمع	٦۰

آیا می‌توان احتمال ظاهر شدن کلیه روهای این تاس را یکسان دانست؟

۲٦. محققی در تجربه‌ای در می‌یابد که رنگ ۵۰ نسل اول حاصل از آمیزش خوکچه‌های هندی کرمی رنگ طبق جدول زیر است:

رنگ	فراوانی
سفید	۸
زرد	۱۵
کرمی	۲۷
جمع	۵۰

آیا اطلاعات با قانون مندل که می‌گوید احتمال سفید بودن و زرد بودن هر یک برابر $\frac{1}{4}$ و احتمال کرمی بودن برابر $\frac{1}{2}$ است توافق دارد؟

۲۷. در نژاد معینی توزیع افراد برحسب گروه‌های خونی متناسب بـا اعـداد ٤، ١٢، ٥ و ٤ اسـت در نژادی دیگر مشاهده می‌شود که در یک نمونه تصادفی به حجم ۷۵۰ نفر فراوانی گـروه‌هـای خونی به ترتیب برابر اعداد ۱۷۷، ۳۵۱، ۱۲۸ و ۹٤ است. آیا می‌توان نسبت گروه‌های خـونی را در هردو نژاد یکسان دانست؟

۲۸. از بین خانواده‌های ٤ اولادی جامعه‌ای، ۳۲ خانواده به طور تصادفی انتخاب و از آنها درباره تعداد فرزندان پسرشان سوال شد. اگر نتیجه مشاهدات بصورت جدول زیر باشد:

تعداد پسر	۰	۱	۲	۳	٤	جمع
فراوانی	٤	۹	۸	۸	۳	۳۲

و براساس این مشاهدات و به فرض اینکه برای هـر زن زایمـان‌هـای او از نظـر جـنس از هـم مستقل باشند آیا می‌توان:

الف: زایمان‌ها را در کل از هم مستقل دانست.

ب: زایمان‌ها را در کل از هم مستقل با احتمال پسرزایی $\frac{۱}{۲}$ دانست.

ج: به فرض مستقل بودن زایمان‌ها احتمال پسرزایی را برابر $\frac{۱}{۲}$ دانست.

۲۹. در تمرین شماره ۱ چنانچه میانگین واقعی نمره هـوش کودکـان منطقـه B برابـر ۸۳ باشـد حجم نمونه لازم را برای اینکه با احتمال ۹۰ درصد بتوان فرضیه مسـاوی بـودن میـانگین نمـره هوش کودکان دو منطقه رادر سطح $\alpha = ۰/۰۵$ مردود شناخت، محاسبه کنید.

۳۰. در تمرین شماره ۲ اگر میانگین واقعی استحکام نخ‌هـای کارخانـه B برابـر ۱۳/۵ کیلـوگرم باشد، فروشنده این نخ باید حجم نمونه را چقدر پیشنهاد کند تـا بـا احتمـال ۸۰ درصـد مـدیر کارخانه نخ کارخانه B را انتخاب کند؟

۳۱. اگر نسبت بهبودی از بیماری کزاز برای یک داروی جدید برابر ۷۰ درصد باشد، چه تعـداد نمونه انتخاب شود تا بـا ۹۰ درصـد اطمینـان فرضـیه یکسـان بـودن تـاثیر ایـن دارو بـا داروی

استاندارد که در آزمایش‌های مکرر نسبت بهبودی از آن ٦٠ درصد بوده است در سطح $\alpha= ۰/۰۵$ معنی‌دار شود؟

۳۲. نسبت گروه خونی O در نژادی برابر ٦۲ درصد است. از نژاد دیگری که در آن نسبت گروه خون O مشخص نیست چه تعداد نمونه انتخاب کنیم تا اگر نسبت واقعی گروه خونی O در این نژاد برابر ٦٤ درصد باشد فرضیه یکسان بودن نسبت گروه خونی در این دو جامعه با ۹۰ درصد اطمینان برای $\alpha = ۰/۰۵$ مردود شناخته شود؟

۳۳. به منظور بررسی رابطه سواد مادر خانوار با تعداد حاملگی او، از مادرانی که سواد خواندن و نوشتن داشتند ٤ نفر و از مادرانی که بی‌سواد بودند ٦ نفر به طور تصادفی انتخاب شد. اگر برای نمونه با سواد جمع اندازه متغیر تعداد حاملگی برابر ۱۰ و مجموع مجذورات آن برابر ٢٦ و برای نمونه دوم اعداد فوق به ترتیب برابر ۲۰ و ٧٦ باشد درباره ارتباط مورد نظر هم از طریق آزمون تساوی واریانس‌ها و هم از طریق تساوی میانگین‌ها قضاوت کنید.

۳٤. جدول زیر اطلاعات مربوط به یک مطالعه مورد- شاهدی جور شده که در آن ارتباط استفاده از استروژن و سرطان رحم مورد بررسی قرار گرفته است را نشان می دهد.

بیمار	کنترل	
	مواجهه دارد	مواجهه ندارد
مواجهه دارد	۱۲	٤۳
مواجهه ندارد	۷	۱۲۱

براساس نتایج این مطالعه آیا می توان فرضیهٔ عدم ارتباط استفاده از استروژن و سرطان رحم را مردود شناخت.

۳۵. در تمرین های ۱۳، ۱۷ و ۱۹ اولا مقدار **p-value** و ثانیاً حدود اطمینان ۹۵٪ را برای اختلاف دو میانگین یا دو نسبت محاسبه کنید.

۳٦. مطالعه‌ای برای مقایسه یک نوع IUD جدید با یک نوع IUD استاندارد از نظر میزان حاملگی در مصرف کننده طی ٦ ماه طراحی شده است. اگر میزان حاملگی برای IUD استاندارد ۰/۰٤ و برای IUD جدید ۰/۰۸ باشد، حجم نمونه را در هر گروه چقدر انتخاب کنیم تا با ۸۰ درصد اطمینان اختلاف در سطح ۹۵ درصد معنی‌دار باشد.

۳۷. در مطالعه‌ای ٤۰ گوسفند جور شده تحت تاثیر دو رژیم غذایی که یکی دارای هورمون و دیگری فاقد هورمون بود قرار گرفت. بعد از سه هفته اضافه وزن گوسفندها برای هر زوج ثبت شد و از آزمون ویلکاکسون برای ٤۰ اضافه وزن استفاده شد. چنانچه برای آزمون ویلکاکسون مقدار T=۵۷۸ باشد، با انجام آزمون مورد نظر درباره تاثیر هورمون بر وزن گیری گوسفندان قضاوت کنید.

۳۸. اطلاعات زیر مربوط به شاخص DMF ۳٤ مرد و ۵٤ زن است. اختلاف میانگین DMF مرد و زن را یکبار با آزمون پارامتری و بار دیگر با آزمون بدون پارامتر مناسب آزمون کنید و نتیجه را با هم مقایسه کنید.

٤	۱۹	٦	٦	۵	۱۰	۲	٤	٦	۸	: مرد
۲	۸	۱	۵	۲	۷	۱۲	۱۰	٤	۱۰	
۷	۸	۱٦	۲	۱۱	٤	٤	٦	۷	۰	
						۲	۰	٤	۸	

٦	۵	۱٤	٤	۸	۸	٤	۱۳	۷	٤	: زن
۸	۸	٤	۱۲	۸	۹	۹	۹	۱۲	٤	
۹	۸	۹	۱٤	۸	۹	۱۵	٦	۱۱	٤	
۷	۸	۸	۷	۱۰	٤	۷	۱۱	۱۲	۷	
۹	۳	٦	٤	۱۰	۱۵	۱٤	۱٦	۱۰	۹	
						۸	۳	۱۰	۳	

فصل هفتم
آنالیز واریانس

۷-۱. مقدمه

در قسمت ٦-٨ روش مقایسه میانگین دو جامعه مورد بررسی قرار گرفت ولی بسیار اتفاق می‌افتد که بخواهیم میانگین سه جامعه و یا بیشتر را یکجا با هم مقایسه کنیم. از جمله می‌توان مقایسه طول مدت درمان را برای یک بیماری معینی با چندروش مختلف در نظر گرفت. اگر بخواهیم این مقایسه را با روش ذکر شده در قسمت مذکور انجام دهیم نه تنها کاری است بسیار مشکل بلکه از نظر اصول نیز خالی از اشکال نمی‌باشد. مشکل بودن کار به این دلیل است که باید برای هر یک از ترکیب‌های دوتایی ممکن از روشهای درمان، آزمون جداگانه‌ای انجام داد که در این صورت اگر ۵ روش درمان مورد بررسی باشد بایستی ده آزمون انجام شود (C_5^2=۱۰) و چنانچه ۱۰ روش درمان مورد بررسی باشد بایستی ٤٥ آزمون انجام شود (C_{10}^2=٤٥) و اما اشکال اصولی این روش در این است که اولا محاسبه انحراف معیار اختلاف بین دو میانگین براساس نمونه حاصل از کلیه مشاهدات انجام نشده و بلکه فقط از مشاهدات دو گروه نمونه‌ای که میانگین جامعه آنها آزمون می‌گردد استفاده می‌شود. ثانیاً با زیاد شدن تعداد گروه‌ها، بسادگی احساس می‌شود که تقریباً با احتمال نزدیک به یقین اقلاً یکی از مقایسه‌های مربوط به دو میانگین که در اصل نمونه‌های انتخاب شده از یک جامعه باشند، به طور تصادفی اختلاف معنی‌دار را نشان دهد. در نتیجه نمی‌توان به معنی‌دار بودن آن اعتماد کرد.

با این ترتیب بجای مقایسه دو به دوی نمونه‌ها بایستی از روشی استفاده کرد که بتوان یکسان بودن میانگین جامعه‌ها را یکجا مورد آزمون قرار داد. مثلا در مقایسه میانگین ۵ جامعه، بتوان فرضیه

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

را در مقابل فرضیه H_1 که عبارت باشد از اینکه اقلا یکی از میانگین‌ها با سایرین اختلاف دارد،

آزمون کرد. یکی از روشهایی که برای حل اینگونه مسائل طرح شده، روش آنالیز واریانس است. گرچه این روش می‌تواند برای حل مسائل گوناگونی بکار گرفته شود ولی در این فصل تنها به ذکر کاربرد موارد خاصی از آن مبادرت می‌گردد.

۷-۲. آنالیز واریانس یک طرفه (طبقه‌بندی نسبت به یک صفت)

ساده‌ترین روش کاربرد آنالیز واریانس، مسئله مربوط به برآورد و مقایسه میانگین یک صفت در چند جامعه است که از جمله می‌توان مقایسه میانگین طول مدت مداوا برای یک بیماری معین را با چند روش و یا مقایسه میانگین کاهش وزن را با چند رژیم مختلف و یا مقایسه میانگین کاهش قند خون بیماران مبتلا به مرض قند را برای تزریق مقادیر مختلف انسولین نام برد. به بیان دیگر این مسئله را می‌توان برآورد و مقایسه میانگین یک صفت برای حالات و یا مقادیر مختلف از صفت دیگر دانست. از این رو این مسئله را آنالیز واریانس برای گروه‌بندی جامعه نسبت به یک صفت نیز می‌نامند. در این قسمت آزمون فرضیه یکسان بودن میانگین جامعه‌ها و در قسمت بعد برآورد ترکیبات خطی مختلف از میانگین‌ها و نیز آزمون یکسان بودن ترکیبات مختلف خطی از این میانگین‌ها مورد بحث قرار خواهد گرفت.

گیریم از k جامعه نمونه‌های تصادفی به ترتیب به حجم‌های n_1 و n_2 و ... و n_k انتخاب کرده و مقدار صفت X را برای هر یک از افراد این نمونه‌ها اندازه گرفته‌ایم. به علاوه فرض می‌کنیم که توزیع صفت در این k جامعه نرمال، و واریانس آن برای k جامعه مساوی باشد که آن را با σ^2 نشان می‌دهیم.

اگر میانگین صفت در این k جامعه را به ترتیب با μ_1، μ_2 ، ... ، μ_k نشان دهیم، آنگاه فرضیه یکسان بودن میانگین‌ها عبارت خواهد بود از:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$$

فرضیه فوق مشابه فرضیه‌ای است که در قسمت ٦-٨ برای آزمون یکسان بودن دو میانگین ذکر گردید که در آنجا برای انجام آزمون از ملاک t استودنت استفاده شد. متاسفانه این ملاک نمی‌تواند برای آزمون فرضیه اخیر بکار رود و در نتیجه باید از روش دیگری استفاده کرد. روشی که در اینجا مورد استفاده قرار می‌گیرد براساس مقایسه دو برآورد مختلف از واریانس مشترک صفت در جامعه‌ها یعنی σ^2 می‌باشد.

اگر مقدار صفت برای فرد j ام از گروه i ام را با X_{ij} نشان دهیم (جدول ۷-۱)، در این صورت براساس روشی که در قسمت ٦-۸ ذکر شد یک برآورد ناتور یا ناریب از σ^2 عبارت خواهد بود از:

$$s_p^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(X_{1j}-\overline{X}_{1.})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j}-\overline{X}_{2.})^2 + \ldots + \sum_{j=1}^{n_k}(X_{kj}-\overline{X}_{k.})^2}{n_1+n_2+\ldots+n_k-k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{i.})^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i - k} \qquad (۱-۷)$$

که در آن $\overline{X}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i}$ معرف میانگین نمونه‌ای در جامعه i ام است.

برآورد دیگری از σ^2 که با روش فوق کاملاً متفاوت و اصولاً مستقل از s_p^2 است، می‌تواند با استفاده از رابطه بین واریانس میانگین‌های نمونه‌ای و واریانس جامعه یعنی $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ بدست آید. براین اساس در صورتی که حجم نمونه (n) برای k جامعه مورد بررسی یکسان باشد $(n_1 = n_2 = \ldots n_k = n)$ برآورد σ^2 عبارت خواهد بود از:

$$s_m^2 = n\frac{\sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{..})^2}{k-1} \qquad (۲-۷)$$

و در حالت کلی وقتی تعداد مشاهدات در گروههای مختلف متفاوت باشد، این برآورد عبارت خواهد بود از :

$$s_m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{..})^2}{k-1} \qquad (۳-۷)$$

در صورتیکه فرضیه H_0 صحیح باشد s_p^2 و s_m^2 هر دو برآوردی ناتور از σ^2 خواهند بود و با فرض نرمال بودن توزیع صفت در هر یک از این k جامعه، نسبت s_m^2 به s_p^2 دارای توزیع F با درجات آزادی $k-1$ و $\sum_{i=1}^{k} n_i - k$ است. حال آنکه اگر فرضیه H_0 صحیح نباشد و میانگین صفت

در k جامعه مورد بررسی متفاوت باشند، سبب می‌شود که s_m^2 به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ شود و امید ریاضی آن بجای σ^2 برابر $\sigma^2 + \frac{\sum n_i(\mu_i-\mu)^2}{k-1}$ گردد که در آن $\mu = \frac{\sum n_i\mu_i}{\sum n_i}$ است. در حالیکه صحیح نبودن فرضیه H_0 بر s_p^2 تاثیری نمی‌گذارد. بنابراین وقتی فرضیه H_0 رد می‌شود که ملاک F محاسبه شده بطور معنی‌داری بزرگ باشد. جدول VI مقدار بحرانی F را برای $\alpha=0/05$ و $\alpha=0/01$ و درجات آزادی مختلف نشان می‌دهد.

جدول ۷-۱. محاسبات مقدماتی آنالیز واریانس برای طبقه‌بندی نسبت به یک صفت (یکطرفه)

شماره ترتیب داخل نمونه‌ها (j)	شماره جامعه‌های جزئی (i)				جمع
	۱	۲	...	K	
۱	X_{11}	X_{21}		X_{k1}	
۲	X_{12}	X_{22}		X_{k2}	
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
	X_{1n_1}	X_{2n_2}		X_{kn_k}	
n_i	n_1	n_2	...	n_k	$\sum n_i$
$\sum_j^{n_i} X_{ij}$	$\sum_j^{n_1} X_{1j}$	$\sum_j^{n_2} X_{2j}$	...	$\sum_j^{n_k} X_{kj}$	$\sum_i^k \sum_j^{n_i} X_{ij}$
$\sum_j^{n_i} X^2_{ij}$	$\sum_j^{n_1} X^2_{1j}$	$\sum_j^{n_2} X^2_{2j}$	...	$\sum_j^{n_k} X^2_{kj}$	$\sum_i^k \sum_j^{n_i} X^2_{ij}$
$\frac{(\sum_j X_{ij})^2}{n_i}$	$\frac{(\sum_j X_{1j})^2}{n_1}$	$\frac{(\sum_j X_{2j})^2}{n_2}$	...	$\frac{(\sum_j X_{kj})^2}{n_k}$	$\sum_i^k \frac{(\sum_j X_{ij})^2}{n_i}$

معمولا برای محاسبه s_p^2 و s_m^2 به جای فرمولهای (۷-۱) و (۷-۲) از شکل محاسباتی آنها براساس آنچه در قسمت ۲-۳ ذکر شد، استفاده می‌شود. به این ترتیب فرمول محاسباتی برای s_p^2 عبارت است از:

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k}\frac{(\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij})^2}{n_i}}{\sum_{i=1}^{k} n_i - k} \qquad (۴-۷)$$

صورت این کسر مجموع مجذورات داخل گروه‌ها و s_p^2 که همان برآورد ترکیبی واریانس است، میانگین مجذورات داخل گروه‌ها نامیده می‌شود.

مشابه روش فوق، فرمول محاسباتی برای s_m^2 عبارت است از :

$$s_m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\frac{(\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij})^2}{n_i} - \frac{(\sum\sum X_{ij})^2}{\sum n_i}}{k-1} \qquad (۵-۷)$$

صورت این کسر مجموع مجذورات بین گروه‌ها و s_m^2 میانگین مجذورات بین گروه‌ها نامیده می‌شود.

لازم به یادآوری است که حاصل جمع صورت کسرهای s_p^2 و s_m^2 عبارت است از:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij})^2}{\sum n_i}$$

که جمع مجموع مجذورات نامیده می‌شود و حاصل جمع مخرج کسرهای s_p^2 و s_m^2 عبارت است از:

$$\Sigma n_i - 1$$

که جمع درجات آزادی نامیده می‌شود.

تجزیه جمع مجموع مجذورات و جمع درجات آزادی، در جدول ۷-۲ که جدول تجزیه واریانس نامیده می‌شود، آمده است. اطلاعات این جدول که به سادگی با استفاده از جدول ۷-۱ قابل محاسبه می‌باشد، برای انجام آزمون فرضیه یکسان بودن میانگین‌ها یعنی فرضیه H_0 کافی است.

جدول ۷-۲. جدول آنالیز واریانس برای یک متغیر (یکطرفه)

منبع تغییرات	(SS) مجموع مجذورات	(df) درجات آزادی	میانگین مجذورات $(MS = \frac{SS}{df})$	امیدریاضی میانگین مجذورات
بین گروه‌ها	$\sum_i \frac{(\sum_j X_{ij})^2}{n_i} - \frac{(\sum\sum X_{ij})^2}{\sum n_i}$	$k-1$	s_m^2	$\sigma^2 + \frac{\sum_i n_i(\mu_i-\mu)^2}{k-1}$
داخل گروهها	$\sum\sum X_{ij}^2 - \sum_i \frac{(\sum_j X_{ij})^2}{n_i}$	$\Sigma n_i - k$	s_p^2	σ^2
جمع (کل)	$\sum\sum X_{ij}^2 - \frac{(\sum\sum X_{ij})^2}{\sum n_i}$	$\Sigma n_i - 1$	-	-

مثال: در یک آزمایش به منظور مقایسه میانگین طول مدت درمان برای یک بیماری معین با چهار روش جداگانه، ۲۵ بیمار را به طور تصادفی به ٤ گروه ٦، ٦، ٦ و ۷ نفری تقسیم کرده، گروه اول را با روش I و گروه دوم را با روش II و گروه سوم را با روش III و بالاخره گروه چهارم را با روش IV مورد مداوا قرار داده‌ایم. طول مدت مداوا تا بهبود یافتن بیمار، برای هر یک از افراد، تعیین شده و در جدول ۷-۳ آمده است. مطلوب است آزمون فرضیه یکسان بودن میانگین طول مدت مداوا برای چهار روش فوق، یعنی:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

جدول ۷ -۳. آمار مربوط به تعداد روزهای مداوا برای چهار روش مختلف و محاسبات مقدماتی آنالیز واریانس

شماره فرد (j)	روش مداوا (i) I	II	III	IV	جمع
۱	۵	۹	۷	۸	
۲	۷	۷	۵	۷	
۳	۸	۵	۸	۶	
۴	۷	۸	۴	۸	
۵	۵	۸	۵	۷	
۶	۸	۷	۶	۹	
۷				۸	
n_i	۶	۶	۶	۷	Σn_i = ۲۵
$\sum_j X_{ij}$	۴۰	۴۴	۳۵	۵۳	$\Sigma\Sigma X_{ij}$ = ۱۷۲
$\sum_j X_{ij}^2$	۲۷۶	۳۳۲	۲۱۵	۴۰۷	$\Sigma\Sigma X_{ij}^2$ = ۱۲۳۰
$\frac{(\sum_j X_{ij})^2}{n_i}$	۲۶۶/۷	۳۲۲/۷	۲۰۴/۲	۴۰۱/۳	$\sum_i \frac{(\sum_j X_{ij})^2}{n_i}$ = ۱۱۹۴/۹

برای حل این مسئله همانطور که گفته شد، از روش آنالیز واریانس استفاده می‌شود و برای این منظور فرض می‌شود که توزیع طول مدت مداوا تحت شرایط هر یک از این چهار روش، نرمال بوده و واریانس صفت در این چهار روش یکسان باشد (σ^2). حال با استفاده از جدول ۷-۳ محاسبات لازم برای تشکیل جدول آنالیز واریانس بصورت زیر انجام می‌شود:

$$\sum_i \frac{(\sum_j X_{ij})^2}{n_i} - \frac{(\sum\sum X_{ij})^2}{\sum n_i} = ۱۱۹۴/۹ - \frac{۱۷۲^2}{۲۵} = ۱۱/۵$$

$$\sum\sum X_{ij}^2 - \sum_i \frac{(\sum_j X_{ij})^2}{n_i} = ۱۲۳۰ - ۱۱۹۴/۹ = ۳۵/۱$$

$$\sum\sum X_{ij}^2 - \frac{(\sum\sum X_{ij})^2}{\sum n_i} = ۱۲۳۰ - \frac{۱۷۲^2}{۲۵} = ۴۶/۶$$

با استفاده از نتایج محاسبات فوق، جدول آنالیز واریانس تشکیل می‌شود (جدول ۷-۴).

جدول ۷-٤. جدول آنالیز واریانس

منبع تغییرات	SS	df	$s^2 = \frac{SS}{df}$	$F = \frac{s_m^2}{s_p^2}$
بین گروه‌ها (m)	۱۱/۵	۳	s_m^2 = ۳/۸۳	۲/۲۹
داخل گروه‌ها (p)	۳۵/۱	۲۱	s_p^2 = ۱/٦۷	
جمع	٤٦/٦	۲٤	–	–

در صورت صحیح بودن فرضیه H_0 ملاک F محاسبه شده در جدول ۷-٤ ، دارای توزیع F با درجات آزادی ۳ و ۲۱ می‌باشد. حال اگر α = ۰/۰۵ انتخاب شود با مراجعه به جدول VI ملاحظه می‌شود که ۳/۰۷ = (۲۱ و ۳) $F_{0.95}$. بنابراین براساس مشاهدات حاصل، فرضیه یکسان بودن میانگین طول مدت مداوا برای این چهار روش بکار رفته، رد نمی‌شود و اختلاف بین میانگین‌های نمونه‌ای معنی‌دار نیست.

۷-۳. مقایسه چندگانه[1]

در قسمت قبل آزمون فرضیه یکسان بودن میانگین k جامعه بیان گردید. معنی‌دار بودن ملاک F در اینجا دلالت بر این می‌کند که میانگین اقلا یکی از جامعه‌ها با دیگران متفاوت است. ولی تنها با معنی‌دار بودن F، نمی‌توان درباره اینکه کدام دو میانگین متفاوت‌اند و یا اینکه حدود اعتماد برای یک ترکیب خطی از میانگین‌ها چه می‌باشد، قضاوت کرد. حال اگر محاسبه حدود اعتماد برای یک ترکیب خطی از میانگین‌ها که قبل از مشاهده اطلاعات درباره آن تصمیم گرفته شده (در حالت خاص می‌تواند برای مقایسه دو میانگین بکار رود) مورد نظر باشد، با استفاده از جدول سطح زیر منحنی برای توزیع t (جدول V) از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\sum \frac{a_i^2}{n_i}} < (a_1\overline{X}_1 + a_2\overline{X}_2 + \ldots + a_k\overline{X}_k) \qquad (۷-٦)$$

$$-(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_k\mu_k) < t_{1-\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\sum \frac{a_i^2}{n_i}}$$

برای مثال اگر $a_1 = 1$ و $a_2 = -1$ انتخاب شود، از رابطه فوق حدود اعتماد $1-\alpha$ برای $\mu_1 - \mu_2$ و همچنین مقایسه میانگین جامعه اول با میانگین جامعه دوم برای سطح اشتباه α بدست

1. Multiple comparison

می‌آید که در این حالت اگر حدود بدست آمده صفر را شامل نشود فرضیه یکسان بودن دو میانگین رد می‌شود. اگر $a_1 = 1$ و $a_2 = -\frac{1}{2}$ و $a_3 = -\frac{1}{2}$ انتخاب شود، حدود اعتماد $\mu_1 - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3)$ و همچنین مقایسه میانگین جامعه اول با متوسط میانگین دو جامعه دوم و سوم بدست می‌آید.

اگر به روش فوق مقایسه ترکیبات خطی مختلف از میانگین‌ها انجام پذیرد و یا بعد از مشاهده اطلاعات درباره یک ترکیب خطی تصمیم گرفته شود، آنگاه سطح معنی‌دار بودن برای اینکه اقلاً یکی از این مقایسه‌ها معنی‌دار شود، و یا مقایسه مربوط به آن ترکیب خطی که پس از مشاهده اطلاعات درباره آن تصمیم گرفته شده معنی‌دار شود، دیگر برابر α نخواهد بود. برای اینکه در چنین حالتی سطح معنی‌دار بودن از α تجاوز نکند روش‌های مختلفی پیشنهاد شده که عموماً بسیار محافظه کارانه می‌باشند. در اینجا ابتدا به ذکر یکی از این روش‌ها که روش شفه[1] نامیده می‌شود، مبادرت می‌گردد. این روش که با استفاده از ملاک F انجام می‌گیرد، براساس قضیه زیر مبتنی است:

قضیه: برای نمونه‌های تصادفی از k جامعه نرمال با میانگین‌های μ_1 و μ_2 و ... و μ_k احتمال اینکه برای کلیه ترکیبات خطی بصورت:

$$a_1\overline{X}_1 + a_2\overline{X}_2 + \ldots + a_k\overline{X}_k - (a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_k\mu_k)$$

بطور توأم رابطه

$$-L < a_1\overline{X}_1 + a_2\overline{X}_2 + \ldots + a_k\overline{X}_k - (a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_k\mu_k) < L$$

برقرار باشد، برابر $1 - \alpha$ است که در آن مقدار L از رابطه زیر:

$$L^2 = (k-1)F_{1-\alpha}(k-1, \sum n_i - k)\, s_p^2 \left(\frac{a_1^2}{n_1} + \frac{a_2^2}{n_2} + \ldots + \frac{a_k^2}{n_k}\right) \qquad (۷-۷)$$

و مقدار F از جدول VI بدست می‌آید.

این فرمول در واقع همان فرمول (۷-۶) است که در آن بجای $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و $t_{\frac{\alpha}{2}}$ به ترتیب از اندازه‌های مثبت و منفی $\sqrt{(k-1)F_{1-\alpha}(k-1, \sum n_i - k)}$ استفاده شده است.

برای مثال فرض می‌کنیم k=۳ و n=٤ (حجم نمونه در کلیه گروه‌ها مساوی انتخاب شده است) و $s_p^2 = ٤/٤١$ باشد و مقدار α برابر ۰/۰۵ انتخاب شود. در این صورت با استفاده از این روش برای

1. Scheffe

ترکیب خطی $\mu_1 - \mu_2$ مقدار L^2 عبارت است از:

$$L^2 = 2 \times 4/26 \times 4/41 \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 18/79$$

و از اینجا حدود اعتماد برای $\mu_1 - \mu_2$ عبارت خواهد بود از:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm \sqrt{18/79}$$

و فرضیه $\mu_1 = \mu_2$ وقتی رد می‌شود که این حدود، صفر را در بر نداشته باشد. برای ترکیب خطی $\mu_1 - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3)$ مقدار L^2 عبارت است از:

$$L^2 = 2 \times 4/26 \times 4/41 \left(\frac{1}{4}+\frac{0/25}{4}+\frac{0/25}{4}\right) = 14/09$$

و از اینجا حدود اعتماد برای $\mu_1 - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3)$ عبارت خواهد بود از:

$$\overline{X}_1 - \frac{1}{2}(\overline{X}_2 + \overline{X}_3) \pm \sqrt{14/09}$$

و فرضیه $\mu_1 = \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3)$ وقتی رد می‌شود که این حدود، صفر را در برنداشته باشد.

عموماً مقایسه‌هایی که در عمل با آن مواجه هستیم، بصورت کانتراست[1] می‌باشد به این معنی که اولا جمع جبری ضریب μ_i ها صفر است.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 0$$

و ثانیاً جمع ضرایب مثبت برابر ۱ است. همانطور که ملاحظه می‌شود این شرایط در مثال بالا نیز صادق است.

در روش دیگری که به نام بن فرونی[2] معروف است برای g مقایسه از قبل تعیین شده به جای $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ از $t_{1-\frac{\alpha}{2g}}$ استفاده می‌شود. مثلا اگر ۵ مقایسه مورد نظر باشد مقدار t برای حدود اعتماد ۹۵ درصد برابر $t_{1-\frac{0/05}{10}}$ یعنی $t_{0/995}$ خواهد شد. در این حالت برای محاسبه p-value لازم است p-value حاصل از روش ساده را در g ضرب کرد.

1. Contrast
2. Bonferroni

۷-٤. آنالیز واریانس دوطرفه (گروه‌بندی نسبت به دو صفت)

در قسمت ۷-۲ کاربرد آنالیز واریانس برای موردی که جامعه نسبت به یک صفت گروه بندی شده بود، آورده شد. در این قسمت آنالیز واریانس را برای آزمایشی که در آن افراد جامعه نسبت به دو صفت طبقه‌بندی شده باشند، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای هر یک از دو متغیر می‌توان تعدادی حالت و یا سطح (مقدار) برای مطالعه انتخاب کرد. مثلا برای مطالعه میانگین وزن نوزاد برحسب سن مادر و مرتبه زایمان ممکن است زنان ۲۰ تا ٤۰ ساله را در ٤ گروه با فاصله سنی ۵ سال و مرتبه زایمان (تا زایمان پنجم) را در ۵ گروه، از زایمان اول تا پنجم در نظر گرفت. در این صورت متغیر اول یعنی سن مادر در چهار طبقه و متغیر دوم یعنی مرتبه زایمان در ۵ طبقه گروه‌بندی شده است. همچنین می‌توان مطالعه تاثیر انسولین در پایین آوردن قند خون را در نظر گرفت. در این مثال دو متغیر مورد نظر برای طبقه‌بندی می‌تواند یکی مقدار دارو و دیگری نوع انسولین باشد. معمولا تعداد سطوح یا حالتها را برای سطرها با r و برای ستون ها با c نشان می‌دهند. به این ترتیب از ترکیب دو متغیری که طبقه‌بندی نسبت به آنها انجام شده rc جامعه حاصل می‌شود.

اگر تعداد مشاهده برای کلیه ترکیبات دو متغیر یکسان انتخاب شود، چنین آزمایشی یک آزمایش فاکتوریل متعادل نامیده می‌شود و بحث ما در این فصل تنها شامل همین حالت می‌باشد.

در قسمت ۷-٤-۱ حالتی را که تعداد مشاهده برای هر ترکیب برابر یک و در قسمت ۷-٤-۲ حالتی را که تعداد مشاهده برای هر ترکیب برابر $n>1$ باشد، بررسی می‌کنیم.

۷-٤-۱. گروه بندی نسبت به دو صفت (بدون تکرار)

در این قسمت حالتی از آزمایش فاکتوریل با دو متغیر(دو عامل) را در نظر می‌گیریم که برای هر ترکیب از سطوح متغیرها (عامل‌ها) فقط یک مشاهده به عمل آمده باشد. مثلا اگر تعداد حالات یا سطوح برای عامل اول ٤ و برای عامل دوم ۳ باشد، در این صورت نتیجه مشاهدات می‌تواند در ۱۲ خانه جدول ۷-۵ آورده شود.

جدول ۷ – ۵.

شماره سطوح یا حالتها برای متغیر دوم	شماره سطوح یا حالتها برای متغیر اول I	II	III	IV	جمع	میانگین
۱	X_{11}	X_{21}	X_{31}	X_{41}	$X_{.1}$	$\overline{X}_{.1}$
۲	X_{12}	X_{22}	X_{32}	X_{42}	$X_{.2}$	$\overline{X}_{.2}$
۳	X_{13}	X_{23}	X_{33}	X_{43}	$X_{.3}$	$\overline{X}_{.3}$
جمع	$X_{1.}$	$X_{2.}$	$X_{3.}$	$X_{4.}$	$X_{..}$	
میانگین	$\overline{X}_{1.}$	$\overline{X}_{2.}$	$\overline{X}_{3.}$	$\overline{X}_{4.}$		$\overline{X}_{..}$

در این جدول $X_{i.}$ معرف جمع ستون i ام، $X_{.j}$ معرف جمع سطر j ام و $X_{..}$ معرف جمع تمام مشاهدات است. به همین ترتیب $\overline{X}_{i.}$ معرف میانگین ستون i ام، $\overline{X}_{.j}$ معرف میانگین سطر j ام و بالاخره $\overline{X}_{..}$ معرف میانگین کل مشاهدات است. همانطور که قبلاً اشاره شد، تعداد ستون‌ها را با c و تعداد سطرها را با r نشان می‌دهند که در اینجا c = ٤ و r = ۳ انتخاب شده است.

در جدول مورد بحث از ترکیب دو متغیری که طبقه‌بندی نسبت به آنها انجام شده r × c جامعه حاصل می شود که از هر یک از rc جامعه تنها یک مشاهده به عمل آمده و براساس این اطلاع می‌خواهیم اولاً یکسان بودن اثر سطوح یا حالتها برای متغیر اول و ثانیاً یکسان بودن اثر سطوح یا حالتها برای متغیر دوم را آزمون کنیم. برای انجام این چنین آزمون‌ها فرض براین است که توزیع صفت در هر یک از rc جامعه مورد نظر نرمال و واریانس صفت برای کلیه این جامعه برابر است که معمولا واریانس را با σ^2 نشان می‌دهند. فرضی که بیان شد برای حالتی که تعداد مشاهده در هر یک از rc جامعه یعنی n بزرگتر از ۱ باشد، کافی است. ولی در این مدل که n=1 است، بایستی علاوه بر آن فرض جمع‌پذیر بودن اثر دو متغیر را نیز وارد کرد. اثر جمع پذیری بدین معنی است که مثلا اگر اثر عامل آورده شده در سطر i ام ۵ واحد بیش از متوسط اثر سطرها و اثر عامل آورده شده در ستون j ام ۲ واحد کمتر از متوسط ستونها باشد، در این صورت اثر دو متغیر را وقتی جمع‌پذیر گویند که اثر مجموع این دو عامل درست برابر ۳ واحد (۲–۵) بیش از میانگین کل بوده و این مطلب به طور مشابه درباره کلیه i ها و کلیه j ها صادق باشد.

روشی که در اینجا برای آزمون هر یک از دو فرضیه ذکر شده مورد استفاده قرار می‌گیرد، همان مقایسه دو برآورد مختلف از واریانس مشترک صفت در جامعه‌ها یعنی σ^2 است. برای این کار سه میانگین مجذورات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$s_c^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{r}(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^{2}}{c-1} = \frac{r\sum_{i=1}^{c}(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^{2}}{c-1} \quad (۸-۷)$$

$$s_r^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{r}(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^{2}}{r-1} = \frac{c\sum_{j=1}^{r}(\overline{X}_{\circ j} - \overline{X}_{..})^{2}}{r-1} \quad (۹-۷)$$

$$s_e^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{r}(X_{ij} - \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{.j} + \overline{X}_{..})^{2}}{(c-1)(r-1)} \quad (۱۰-۷)$$

تحت شرایط مفروضات ذکر شده، این سه میانگین مجذورات مستقل از هم بوده و s_e^2 همواره یک برآورد ناتور از σ^2 است ولی s_c^2 و s_r^2 در حالت کلی برآوردهای ناتور از σ^2 نمی‌باشند. s_c^2 در صورتی یک برآورد ناتور از σ^2 است که اثر سطوح یا حالتهای متغیر اول (ستون‌ها) یکسان باشد و نیز s_r^2 در صورتی یک برآورد ناتور از σ^2 است که اثر سطوح یا حالتهای متغیر دوم (سطرها) یکسان باشد. به این ترتیب در صورت صحیح بودن «فرضیه یکسان بودن اثر عامل ستون‌ها» عبارات s_c^2 و s_e^2 هر دو برآورد ناتور از σ^2 بوده و نسبت $\frac{s_c^2}{s_e^2}$ دارای توزیع F با درجات آزادی c-1 و (c-1) (r-1) می‌باشد. به همین ترتیب در صورت صحیح بودن فرضیه «یکسان بودن اثر عامل سطرها» عبارات s_r^2 و s_e^2 هر دو برآورد ناتور از σ^2 بوده و نسبت $\frac{s_r^2}{s_e^2}$ دارای توزیع F با درجات آزادی r-1 و (r-1) (c-1) می‌باشد. چون در هر دو مورد، صحیح نبودن فرضیه مورد آزمون بر s_e^2 تاثیر نمی‌گذارد و تنها سبب می‌شود که صورت کسر ملاک F مورد آزمون به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یابد، بنابراین چه در مورد فرضیه «یکسان بودن اثر سطرها» و چه در مورد فرضیه «یکسان بودن اثر ستونها» وقتی فرضیه مورد نظر رد می‌شود که ملاک F محاسبه شده به طور معنی‌داری بزرگ باشد. برای این مقایسه از جدول VI مقدار بحرانی F برای $\alpha=0/05$ و $\alpha = 0/01$ و درجات آزادی مختلف بدست می‌آید. معمولاً برای محاسبه s_c^2 و s_r^2 بجای فرمولهای (۷-۸) و (۷-۹) از شکل محاسباتی آنها براساس آنچه در قسمت ۲-۳ ذکر شد، استفاده می‌شود. به این ترتیب فرمول محاسباتی برای s_c^2 عبارت است از :

$$s_c^{2} = \frac{\sum \frac{X_{i.}^{2}}{r} - \frac{X_{..}^{2}}{cr}}{c-1} \quad (۱۱-۷)$$

که صورت این کسر مجذورات بین ستونها (SS_c) نامیده می‌شود و فرمول محاسباتی برای s_r^2

عبارت است از:

$$s_r^۲ = \frac{\sum \frac{X_{.j}^۲}{c} - \frac{X_{..}^۲}{cr}}{r-۱} \qquad (۱۲-۷)$$

که صورت این کسر مجذورات بین سطرها (SS_r) نامیده می‌شود.

در محاسبه $s_e^۲$ به این مطلب توجه داشته می‌شود که با محاسبات جبری ساده می‌توان نشان داد که حاصل جمع صورت کسرهای سمت راست روابط (۷-۸) و (۷-۹) و (۷-۱۰) برابر است با :

$$\sum_{i=۱}^{c} \sum_{j=۱}^{r} (X_{ij} - \overline{X}_{..})^۲ = \sum_{i=۱}^{c}\sum_{j=۱}^{r} X_{ij}^۲ - \frac{(X_{..})^۲}{cr}$$

که مجموع مجذورات (SS_T) نامیده می‌شود. بنابراین برای محاسبه صورت کسر $s_e^۲$ که آن را مجموع مجذورات باقیمانده (SS_R) می‌نامیم، کافی است جمع صورت کسرهای سمت راست روابط (۷-۸) و (۷-۹) را از جمع مجموع مجذورات، کسر کرد. به عبارت دیگر برای بدست آوردن صورت کسر $s_e^۲$ کافی است مجموع مجذورات بین ستونها و مجموع مجذورات بین سطرها را از جمع مجذورات کم کنیم.

حاصل جمع مخرج کسرهای $s_c^۲$ و $s_r^۲$ و $s_e^۲$ برابر است با cr – ۱ که جمع درجات آزادی نامیده می‌شود. تجزیه جمع مجموع مجذورات و جمع درجات آزادی در جدول ۷-٦ آمده است.

جدول ۷-٦. جدول آنالیز واریانس برای گروه‌بندی نسبت به دو صفت بدون تکرار

	مجموع مجذورات (SS)	درجات آزادی (df)	میانگین مجذورات $(MS = \frac{SS}{df})$
بین ستونها	$\sum \frac{X_{i.}^۲}{r} - \frac{X_{..}^۲}{cr} = SS_c$	c–۱	$S_c^۲$
بین سطرها	$\sum \frac{X_{.j}^۲}{c} - \frac{X^۲_{..}}{cr} = SS_r$	r–۱	$S_r^۲$
باقیمانده	$SS_T - SS_c - SS_r = SS_R$	(c–۱) (r–۱)	$S_e^۲$
جمع	$\sum\sum X_{ij}^۲ - \frac{X^۲_{..}}{cr} = SS_T$	cr – ۱	

مثال: محققی چهار نوع دارو (c=٤) را برای مداوای سه شکل از یک بیماری (r=۳) بکار می‌برد. برای هر ترکیب از نوع دارو و شکل بیماری، فقط یک بیمار به طور تصادفی برای آزمایش انتخاب

می‌شود (n=۱) طول مدت مداوا تا حصول بهبودی برحسب روز تعیین شده و نتایج در جدول ۷-۷ آمده است. براساس مشاهدات حاصل، می خواهیم یکسان بودن میانگین طول مدت مداوا را اولاً برای نوع دارو و ثانیاً برای شکل بیماری آزمون کنیم.

جدول ۷ – ۷.

شکل بیماری	نوع دارو				جمع
	I	II	III	IV	
۱	۷	٦	۸	۷	۲۸
۲	۲	٤	٤	٤	١٤
۳	٤	٦	۵	۳	۱۸
جمع	۱۳	١٦	۱۷	١٤	٦٠

مجموع مجذورات بین ستونها (دارو) و بین سطرها (بیماری) و کل و باقیمانده به ترتیب بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$SS_c = \frac{(۱۳)^۲}{۳} + \frac{(١٦)^۲}{۳} + \frac{(۱۷)^۲}{۳} + \frac{(١٤)^۲}{۳} - \frac{(٦٠)^۲}{۱۲} = ۳/۳$$

$$SS_r = \frac{(۲۸)^۲}{٤} + \frac{(١٤)^۲}{٤} + \frac{(۱۸)^۲}{٤} - \frac{(٦٠)^۲}{۱۲} = ۲٦$$

$$SS_T = ۷^۲ + ۲^۲ + ٤^۲ + ... + ۷^۲ + ٤^۲ + ۳^۲ - \frac{٦٠^۲}{۱۲} = ۳٦$$

$$SS_R = ۳٦ - (۳/۳ + ۲٦) = ٦/۷$$

حال با استفاده از نتایج محاسبات فوق، جدول آنالیز واریانس (جدول ۷-۸) به صورت زیر تشکیل می‌شود:

جدول ۷-۸

منبع تغییرات	SS	df	$(s^2 = \frac{SS}{df})$	F
بین ستونها	۳/۳	۳	S_c^2 = ۱/۱	۱/۰
بین سطرها	۲۶	۲	S_r^2 = ۱۳	۱۱/۸
باقیمانده	٦/٧	٦	S_e^2 = ۱/۱	
جمع	۳٦	۱۱		

اینک، در صورت صحیح بودن فرضیه «یکسان بودن اثر ستونها» F محاسبه شده مربوط به ستون‌ها دارای توزیع F با درجات آزادی ۳ و ٦ می‌باشد. حال اگر α =۰/۰۵ انتخاب شود، با مراجعه به جدول، ملاحظه می‌شود که ٤/٧٦= (٦ و ۳) $F_{۰/۹۵}$ چون ملاک F محاسبه شده (۱/۰) از عدد بحرانی ٤/٧٦ کوچکتر است، بنابراین براساس مشاهدات حاصل، فرضیه یکسان بودن میانگین طول مدت درمان برای این ٤ نوع دارو مردود شناخته نمی‌شود. ولی اگر F محاسبه شده مربوط به سطرها را در نظر بگیریم، مشاهده می‌شود که مقدار این ملاک (۱۱/۸) حتی از ۱۰/۹ = (٦ و ۲) $F_{۰/۹۹}$ نیز بزرگتر است. بنابراین براساس مشاهدات حاصل، فرضیه یکسان بودن میانگین طول مدت درمان را برای اشکال بیماری مردود می‌شناسیم و می‌گوییم طول مدت درمان در اشکال مختلف بیماری یکسان نمی‌باشد.

نکته مهم اینکه این حالت از آنالیز واریانس را می‌توان شکل توسعه یافته‌ای از آزمون t زوج تلقی کرد که در آن مقایسه بیش از دو اندازه برای هر فرد مورد نظر است. مثلا مقایسه درجه حرارت در ۸ صبح، ۱۲ ظهر و ۸ شب در n نفر در شرایطی که درجه حرارت هر نفر در ساعات مذکور اندازه‌گیری شده باشد مصداقی از این حالت است. در واقع در این مطالعه مقایسه درجه حرارت صبح و ظهر و شب مورد نظر است و نه مقایسه درجه حرارت بین افراد.

۷-٤-۲. گروه بندی نسبت به دو صفت (با تکرار)

در این قسمت مانند قسمت قبل یک آزمایش فاکتوریل با دو متغیر را در نظر می‌گیریم با این تفاوت که برای هر ترکیب از سطوح دو متغیر (دوعامل) بجای یک مشاهده n مشاهده به عمل آمده باشد. در اینجا نیز همانطور که قبلا اشاره شد، تعداد ستونها (تعداد حالات برای متغیر اول) را با c و تعداد سطرها (تعداد حالات برای متغیر دوم) را با r نشان می‌دهیم.

در این مدل فرض جمع‌پذیر بودن اثر دو عامل که در قسمت قبل در نظر گرفته شد، لزومی نخواهد داشت و می‌توان آن را به عنوان فرضیه‌ای آزمون نمود. سایر مفروضات همانطور که قبلاً ذکر شد در این مدل نیز منظور می‌گردد. به این ترتیب براساس مشاهدات انجام شده می‌خواهیم فرضیه‌های:

۱. یکسان بودن اثر سطوح یا حالتها برای متغیر اول (ستونها)

۲. یکسان بودن اثر سطوح یا حالتها برای متغیر دوم (سطرها)

۳. جمع‌پذیر بودن اثر دو متغیر (اثر متقابل دو صفت)

را آزمون کنیم. در اینجا نیز روشی که برای آزمون هر یک از این سه فرضیه بکار می‌رود همان مقایسه دو برآورد مختلف از واریانس مشترک صفت در جامعه یعنی $\sigma^۲$ است. برای این کار، چهار میانگین مجذورات زیر رادر نظر می‌گیریم:

$$s_c^۲ = \frac{rn\sum_{i=۱}^{c}(\bar{X}_{i..} - \bar{X}...)^۲}{c-۱} \qquad (۱۳-۷)$$

$$s_r^۲ = \frac{cn\sum_{j=۱}^{r}(\bar{X}_{.j.} - \bar{X}...)^۲}{r-۱} \qquad (۱۴-۷)$$

$$s_I^۲ = \frac{n\sum_{i=۱}^{c}\sum_{j=۱}^{r}(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}...)^۲}{(c-۱)(r-۱)} \qquad (۱۵-۷)$$

$$s_e^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{c}\sum_{j=۱}^{r}\sum_{k=۱}^{n}(X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})^۲}{cr(n-۱)} \qquad (۱۶-۷)$$

که X_{ijk} معرف مشاهده k ام از گروه i ام نسبت به متغیر اول و گروه j ام نسبت به متغیر دوم است. بکار بردن سایر علامات مشابه حالت قبل می‌باشد. مثلاً $\bar{X}_{.j.}$ معرف میانگین کل مشاهدات سطر j ام و $\bar{X}_{ij.}$ معرف میانگین n مشاهده خانه مربوط به ستون i ام و سطر j ام است. تحت شرایط مفروضات انجام شده این چهار میانگین مجذورات، مستقل از هم بوده و $s_e^۲$ همواره یک برآورد ناتور از $\sigma^۲$ است ولی $s_c^۲$ و $s_r^۲$ و $s_I^۲$ در حالت کلی برآورد ناتور از $\sigma^۲$ نمی‌باشند. $s_c^۲$ و $s_r^۲$ و $s_I^۲$ در صورتی برآورد ناتور از $\sigma^۲$ می‌باشند که به ترتیب فرضیه‌های ۱ و ۲ و ۳ مذکور در فوق صادق باشند.

به این ترتیب در صورت صحیح بودن فرضیه یکسان بودن اثر عامل مربوط به ستونها عبارات s_c^2 و s_e^2 هر دو برآورد ناتور از σ^2 بوده و نسبت $\frac{s_c^2}{s_e^2}$ دارای توزیع F با درجات آزادی ۱-c و rc(n-۱) می‌باشد و به همین ترتیب در صورت صحیح بودن فرضیه یکسان بودن اثر عامل مربوط به سطرها نسبت $\frac{s_r^2}{s_e^2}$ دارای توزیع F با درجات آزادی ۱-r و rc(n-۱) و بالاخره در صورت صحیح بودن فرضیه جمع‌پذیر بودن اثر متغیر نسبت $\frac{s_I^2}{s_e^2}$ دارای توزیع F با درجات آزادی (c-۱) (r-۱) و rc (n-۱) می‌باشد. و در هر مورد ملاک F محاسبه شده با مقدار بحرانی F برای α انتخاب شده که با استفاده از جدول VI بدست می‌آید، مقایسه و نتیجه‌گیری می‌شود.

معمولاً برای محاسبه s_c^2 و s_r^2و s_I^2 و s_e^2 بجای فرمولهای (۷-۱۳) تا (۷-۱۶) از شکل محاسباتی آنها براساس آنچه در قسمت ۲-۳ ذکر شد استفاده می‌شود. به این ترتیب فرمول محاسباتی برای s_c^2 عبارت است از:

$$s_c^2 = \frac{\sum \frac{X_{i..}^2}{nr} - \frac{X^2...}{nrc}}{c-1} \qquad (۷-۱۷)$$

که صورت کسر مجموع مجذورات بین ستونها (SS_c) نامیده می‌شود، و فرمول محاسباتی برای s_r^2 عبارت است از:

$$s_r^2 = \frac{\sum \frac{X^2_{.j.}}{nc} - \frac{X^2...}{nrc}}{r-1} \qquad (۷-۱۸)$$

که صورت کسر مجموع مجذورات بین سطرها(SS_r) نامیده می‌شود. در محاسبه s_I^2 به این مطلب توجه داده می‌شود که با محاسبات جبری ساده می‌توان نشان داد که حاصل جمع صورت کسرهای سمت راست روابط (۷-۱۳) تا (۷-۱۵) برابر است با:

$$n\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{r}(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}...)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{r}X_{ij.}^2 - \frac{X^2...}{nrc}$$

که آن را زیر جمع مجموع مجذورات(SS_s) می‌نامیم. بنابراین برای محاسبه صورت کسر s_I^2 که به SS_I نشان می‌دهیم، کافی است جمع SS_c و SS_r را از SS_s کم کنیم.

مشابه آنچه برای محاسبه s_I^2 آورده شد، با محاسبات جبری ساده می‌توان نشان داد که حاصل

جمع صورت کسرهای سمت راست روابط (۷-۱۳) تا (۷-۱۶) برابر است با:

$$\sum\sum\sum(X_{ijk}-\bar{X}_{...})^{۲}=\sum\sum\sum X^{۲}_{\mathrm{ijk}}-\frac{X^{۲}_{...}}{nrc}$$

که آن را جمع مجمع مجذورات (SS_T) می‌نامیم. بنابراین برای محاسبه صورت کسر $s_e^{۲}$ که با SS_e نشان می‌دهیم. کافی است SS_s را از SS_T کم کنیم. تجزیه جمع مجموع مجذورات و جمع درجات آزادی در جدول ۷-۹ آمده است.

جدول ۷-۹.

منبع تغییرات	SS	df	MS
بین ستونها	$SS_c=\sum\frac{X^{۲}_{i..}}{nr}-\frac{X^{۲}_{...}}{nrc}$	c − ۱	$s_c^{۲}$
بین سطرها	$SS_r=\sum\frac{X^{۲}_{.j.}}{nc}-\frac{X^{۲}_{...}}{nrc}$	r − ۱	$s_r^{۲}$
اثرمتقابل	$SS_I = SS_s - SS_c - SS_r$	(c−۱) (r−۱)	$s_I^{۲}$
زیر جمع	$SS_s=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{c}\sum_{j=۱}^{r}X^{۲}_{ij.}-\frac{X^{۲}_{...}}{nrc}$	rc −۱	$s_s^{۲}$
داخل گروه‌ها (اشتباه)	$SS_e = SS_T - SS_s$	rc(n−۱)	s_e^2
جمع	$SS_T=\sum\sum\sum X^{۲}_{ijk}-\frac{X^{۲}_{...}}{nrc}$	nrc −۱	

در عمل، معمولاً ابتدا معنی‌دار بودن اثر متقابل را آزمون می‌کنند. چنانچه این اثر معنی‌دار شود، در محاسبه F برای آزمون عامل سطر و یا ستون از میانگین مجذورات داخل گروه‌ها $s_e^{۲}$ به عنوان واریانس اشتباه در مخرج کسر استفاده می‌شود، ولی اگر اثر متقابل معنی‌دار نشود یعنی فرضیه جمع‌پذیر بودن اثر دو متغیر صحیح باشد، $s_I^{۲}$ و $s_e^{۲}$ هر دو برآورد ناتور از واریانس اشتباه ($\sigma^{۲}$) بوده و لذا یک برآورد ترکیبی بصورت:

$$\frac{SS_I+SS_e}{(c-۱)(r-۱)+rc(n-۱)}$$

یا پس از ساده کردن مخرج بصورت:

$$\frac{SS_I+SS_e}{nrc-c-r+۱}$$

برآورد بهتری برای $\sigma^{۲}$ خواهد بود.

مثال: محققی چهار نوع دارو (c = ٤) را برای مداوای سه شکل از یک بیماری (r=۳) بکار می‌برد و برای هر ترکیب از نوع دارو وشکل بیماری، ٥ بیمار را به طور تصادفی برای آزمایش انتخاب می‌کند(n = ٥). طول مدت درمان را برای هر بیمار تا حصول بهبودی برحسب روز تعیین می‌کند که نتایج آن در جدول ۷-۱۰ آمده است.

طبق روابط موجود در جدول ۷-۹ برای محاسبه مجموع مجذورات خواهیم داشت:

$$SS_c = \frac{58^2}{15} + \frac{77^2}{15} + \frac{76^2}{15} + \frac{81^2}{15} - \frac{292^2}{60} = 20/9$$

$$SS_r = \frac{119^2}{20} + \frac{75^2}{20} + \frac{98^2}{20} - \frac{292^2}{60} = 48/4$$

$$SS_s = \frac{24^2}{5} + \frac{25^2}{5} + \frac{36^2}{5} + \frac{34^2}{5} + \frac{15^2}{5} + \frac{20^2}{5} + \frac{20^2}{5}$$

$$+ \frac{20^2}{5} + \frac{19^2}{5} + \frac{32^2}{5} + \frac{20^2}{5} + \frac{27^2}{5} - \frac{292^2}{60} = 97/3$$

$$SS_I = 97/3 - (20/9 + 48/4) = 28$$

$$SS_T = 6^2 + 5^2 + \ldots + 9^2 + 1^2 - \frac{292^2}{60}$$

$$= 1800 - \frac{292^2}{60} = 378/9$$

$$SS_e = 378/9 - 97/3 = 281/6$$

جدول ۷ – ۱۰. طول مدت درمان (روز) بر حسب شکل بیماری و نوع دارو

شکل بیماری	نوع دارو				جمع
	I	II	III	IV	
۱	٦	۷	۸	۸	
	۵	۸	۷	۹	
	٤	۲	۱۰	۱۰	۱۱۹
	۷	۳	۵	۱	
	۲	۵	٦	٦	
۲	۳	٤	۲	۳	
	۲	٦	۵	٤	
	۱	۵	٦	۵	۷۵
	٤	۳	۳	۷	
	۵	۲	٤	۱	
۳	٤	٦	۵	۸	
	۵	۸	۹	٦	
	۲	۵	۲	۳	۹۸
	۷	٤	۳	۹	
	۱	۹	۱	۱	
جمع	۵۸	۷۷	۷٦	۸۱	۲۹۲

حال با استفاده از نتایج محاسبات فوق جدول آنالیز واریانس (جدول ۷ – ۱۱) به صورت زیر تشکیل می‌شود.

جدول ۷–۱۱.

منبع تغییرات	SS	d*f*	MS	F
بین ستونها	۲۰/۹	۳	۷	
بین سطرها	٤۸/٤	۲	۲٤/۲	
اثر متقابل	۲۸	٦	٤/۷	۰/۸
زیر جمع	۹۷/۳	۱۱		
داخل گروه‌ها (اشتباه)	۲۸۱/٦	٤۸	۵/۹	
جمع	۳۷۸/۹	۵۹		

اینک با فرض $\alpha = ۰/۰۵$ ابتدا اثر متقابل را آزمون می‌کنیم که چون ملاک F مربوط بـه ایـن اثـر (۰/۸) از عدد بحرانی $F_{۰/۹۵}$ (۴۸ و ۶) = ۲/۳۰ کوچکتر است، فرضیه جمع‌پذیر بودن اثـر نـوع دارو و شکل بیماری مردود شناخته نمی‌شود و به این ترتیب برای آزمون عامل مربوط به ستون یا سـطر، برآورد ترکیبی واریانس اشتباه عبارت خواهد بود از:

$$\frac{۲۸ + ۲۸۱/۶}{۵۴} = ۵/۷۳$$

و F مربوط به اثر ستونها برابر ۱/۲۲ = $\frac{۷}{۵/۷۳}$ و F مربوط به اثر سـطرها برابـر ۴/۲۲= $\frac{۲۴/۲}{۵/۷۳}$ خواهد شد. اینک با استفاده از جدول VI داریم:

$$F_{۰/۹۵}\ (۳ \text{ و } ۵۴) = ۲/۷۸$$

$$F_{۰/۹۵}\ (۲ \text{ و } ۵۴) = ۳/۱۷$$

$$F_{۰/۹۹}\ (۲ \text{ و } ۵۴) = ۵/۰۲$$

و ملاحظه می‌شود که اثر عامل مربوط به ستون (نوع دارو) معنی‌دار نیست در حالی که اثر عامل مربوط به سطر (شکل بیماری) در سـطح اشـتباه ۵ درصـد معنـی‌دار اسـت. براسـاس ایـن بررسـی قضاوت می‌شود که تنها شکل بیماری در طول مدت مداوا موثر است.

۷-۵. آزمون بدون پارامتر کروسکال والیس[1]

در قسمت ۶-۱۴-۲ به آزمون بدون پارامتر من- ویتنـی- ویلکاکسـون بـرای مقایسـه موقعیـت مکانی دو گروه هنگامی که متغیر از نوع رتبه‌ای باشد اشاره شد. اینک چنانچه بخـواهیم بـیش از دو گروه را مقایسه کنیم و داده‌های آن به صورت رتبه‌ای باشد از آزمون بدون پارامتر کروسکال والیس به شرح زیر استفاده می‌کنیم:

$$\chi^{۲} = \frac{۱۲\sum n_i(\overline{R}_i - \frac{n+۱}{۲})^{۲}}{n(n+۱)} \qquad (۱۹\text{-}۷)$$

در این فرمول n_i معرف اندازه نمونه برای هر یک از گروه‌هایی است که مقایسه آنها مورد نظـر است که در این صورت Σni برابر کل نمونه یعنی n خواهد شد. $\overline{R}_i$ معـرف میـانگین رتبـه در هـر گروه است که از $\overline{R}_۱$ تا $\overline{R}_k$ تغییر می‌کند برای آزمون معنی‌دار بودن ملاک کـای دو ($\chi^{۲}$) حاصـل را

1. Kruskal-Wallis

با جدول توزیع $\chi^۲$ برای k-۱ درجه آزادی مقایسه می‌کنیم و طبق معمول چنانچه $\chi^۲$ محاسبه شده از $\chi^۲_{۱-\alpha}(k-۱)$ بزرگتر باشد به رد فرضیه $H_۰$ یعنی رد فرضیه مساوی بودن میانگین رتبه‌ها اقدام می‌کنیم. در مواردی که تعداد رتبه‌های مشابه زیاد باشد لازم است فرمول (۷-۱۹) را بر ضریب تصحیح معرفی شده در فصل ٦ یعنی رابطه (٦-۲۷) تقسیم کرد.

مثال: اطلاعات جدول ۷-۱۲ اندازه‌های کاهش درد را برای چهار روش درمان بعد از عمل جراحی در ۳٦۵ بیمار نشان می‌دهد. در این مطالعه برای نشان دادن شدت کاهش درد از رتبه‌های اصلاً، ضعیف، متوسط، خوب و خیلی خوب با نمرات ۱ تا ۵ استفاده شده است. در این اطلاعات به دلیل محدودیت رتبه‌ها اعداد تکراری قابل توجه است لذا استفاده از ضرایب تصحیح یعنی رابطه (٦-۲۷) کاملاً ضروری است.

جدول ۷-۱۲. توزیع فراوانی کاهش درد در ۳٦۵ بیمار جراحی شده برحسب نوع درمان و شدت کاهش

نوع درمان	شدت درد					جمع	میانگین
	اصلا (۱)	ضعیف (۲)	متوسط (۳)	خوب (٤)	خیلی خوب (۵)		
استفاده از دوز کم آیبوبروفین	۰	٦	۱۰	۱۷	٦۱	۹٤	۲۰۳/٤۹
استفاده از دوز بالای آیبوبروفین	۱	۳	۵	۲۵	۵۲	۸٦	۲۰۱/۹۱
استفاده از آسپیرین	۱	٤	۱۱	۲۵	٤۷	۸۸	۱۸۵/۷۳
استفاده از پلاسبو	۰	۱۸	۱۰	۳۷	۳۲	۹۷	۱٤۳/۹۰
جمع	۲	۳۱	۳٦	۱۰٤	۱۹۲	۳٦۵	۱۸۳
میانگین رتبه	۱/۵	۱۸/۰	۵۱/۵	۱۲۱/۵	۲٦۹/۵		

در این جدول برای مثال عدد ۳۱ معرف تعداد افرادی است که کاهش درد در آنها ضعیف بوده است که البته به دلیل تکرار رتبه از شماره ۳ (بعد از ۲ نفر مربوط به گروه اصلاً) تا ۳۳ (یعنی ۳۱ عدد) میانگین آن برابر ۱۸ خواهد شد.

مقدار $\chi^۲$ براساس رابطه ۷-۱۹ برابر است با:

$$\chi^۲ = \frac{۱۲\,[۹٤(۲۰۳/۹٤-۱۸۳)^۲ + ۸٦(۲۰۱/۹۱-۱۸۳)^۲ + ۸۸(۱۸۵/۷۳-۱۸۳)^۲ + ۹۷(۱٤۳/۹۰-۱۸۳)^۲]}{۳٦۵(۳٦٦)}$$

$$\chi^۲ = ۱۹/۷۰$$

با توجه به تعدد رتبه‌های مشابه مقدار f از رابطه (۶-۲۷) برابر است با:

$$f = ۱ - \frac{۲\times۱\times۳ + ۳۱\times۳۰\times۳۲ + ... + ۱۹۲\times۱۹۱\times۱۹۳}{۳۶۵\times۳۶۴\times۳۶۶} = ۰/۸۳$$

مقدار $\chi^۲$ پس از اعمال تصحیح f برابر است با :

$$\chi^۲_{\text{تصحیح شده}} = \frac{۱۹/۷۰}{۰/۸۳} = ۲۳/۷۳$$

که در مقایسه با $\chi^۲$ جدول برای ۳ درجه آزادی در سطح ۰/۰۰۱ معنی‌دار است. به عبارت دیگر فرض مساوی بودن میانگین رتبه‌ها در چهار گروه درمانی رد می‌شود.

تمرین

۱. در یک آزمایشگاه چهار تکنیسین کار می‌کنند. به منظور مقایسه سرعت عمل این چهار تکنیسین مدت لازم (برحسب دقیقه) برای انجام یک آزمایش معینی را (در حد دقت قابل قبول) برای این افراد در تعدادی دفعات تعیین نموده‌ایم. نتایج حاصل به قرار جدول زیر می‌باشد.

شماره تکنیسین

	۱	۲	۳	٤
زمان آزمایش (برحسب دقیقه)	۱۲	۱۱	۱۰	۱۵
	۸	۱٤	۱٤	۱۵
	۱۲	۱۲	۱۱	۱٤
	۱۲	۱۰	۹	۱۲
	۱۰	۱۱	۱۲	۱٤
	۱۰			۱٤

الف: سرعت عمل این چهار تکنسین را با هم مقایسه کنید.

ب: با فرض اخذ تصمیم قبل از مشاهده اطلاعات، میانگین اولی را با میانگین سه گروه دیگر مقایسه نمایید.

ج: با فرض اخذ تصمیم قبل از مشاهده اطلاعات میانگین اولی را با میانگین سومی مقایسه کنید.

۲. اطلاعات زیر نتیجه آزمایش را برای مقاومت چهار نوع نخ جراحی برحسب کیلوگرم وزنی که می‌توانند تحمل کنند (X) نشان می‌دهد.

نوع نخ	I	II	III	IV
تعداد نمونه	۳۶	۳۰	۲۰	۲۵
$\overline{X}$	۲/۰	۲/٤	۱/۸	۳/۱
s_x^2	۱/٦٤	۲/۲۰	۱/۸۰	۳/۰۰

الف: میانگین این چهارنوع نخ را مقایسه کنید.
ب: میانگین سه گروه اول را با گروه چهارم مقایسه کنید (با فرض اینکه این تصمیم قبل از مشاهده اطلاعات گرفته شده باشد).
ج: میانگین سه گروه اول را با گروه چهارم مقایسه کنید (با فرض اینکه این تصمیم پس از مشاهده اطلاعات گرفته شده باشد).

۳. به منظور مقایسه اثر احتمالی وراثت بر متغیر فشار خون شریانی در سه رده موش صحرایی، از هر رده فشار خون شریانی ده موش را (برحسب میلی‌متر جیوه) اندازه‌گیری نموده‌ایم. میانگین فشار خون برای رده‌های A و B و C به ترتیب $\overline{X}_A$ = ۸٤/۵ ، $\overline{X}_B$ =۸۸/۰ و $\overline{X}_C$ = ۹۱/۱ و مجموع مجذورات داخل گروه‌ها برابر ۲۷۰ بدست آمده است.
الف: فرضیه یکسان بودن میانگین فشار خون سه رده موش را آزمون کنید.
ب: فرضیه یکسان بودن میانگین فشار خون رده B و C را با فرض اینکه این تنها مقایسه مورد نظر باشد آزمون کنید.
ج: با استفاده از مقایسه چند گانه، میانگین‌های فشار خون رده B را با C و میانگین رده‌های C و B را با A مقایسه کنید.

٤. یک نوع کودشیمیایی را در دو غلظت مختلف در ١٦ کرت مساوی که به طور تصادفی بدو گروه ۸ تایی تقسیم شده بود مورد آزمایش قرار داده و مقدار محصول بدست آمده از هر کرت به قرار زیر ارائه شده است:

مقدار محصول

برای غلظت اول	برای غلظت دوم
۸	۸
۸	۷
۹	٦
۷	٦
۱۱	۷
۱۰	۹
۸	۹
۹	۸

اولا با انجام آزمون t (مقایسه دو میانگین) و ثانیاً با روش آنالیز واریانس، اختلاف بین تاثیر دو غلظت کود شیمیای را آزمون کنید.

۵. بمنظور مقایسه تاثیر سه نوع رژیم غذایی بر ازدیاد وزن موش‌های نوزاد، ٤ موش حامله را که هر کدام سه بچه به دنیا آورده‌اند در نظر گرفته‌ایم. سه بچه متعلق به هر نسل را به طور تصادفی تحت شرایط یکی از سه رژیم قرار داده‌ایم. نتایج اضافه وزن (گرم) بعد از سه هفته در جدول زیر آمده است:

مادر	رژیم		
	I	II	III
۱	۵/۲	۷/٤	۹/۱
۲	۱۱/٤	۱۳/۰	۱۳/۷
۳	٤/۲	۹/۵	۸/۸
٤	۱۰/۷	۱۱/۹	۱۳/۰

الف: جدول آنالیز واریانس را تشکیل دهید و یکسان بودن تاثیر سه نوع رژیم را مقایسه کنید.

ب: مفروضات لازم برای انجام آزمون فوق را بیان کنید.

٦. بمنظور مقایسه تاثیر سه نوع رژیم غذایی و دو نوع تزریق دارو بر ازدیاد وزن موشهای نوزاد، ۱۲ موش نوزاد را به طور تصادفی به شش گروه ۲ تایی تقسیم کرده و هرگروه را تحت شرایط ترکیبی از نوع رژیم و تزریق دارو قرارداده‌ایم. نتایج اضافه وزن (گرم) بعد از سه هفته در جدول زیر ارائه می‌گردد:

داروی تزریق شده	رژیم		
	I	II	III
۱	۸/۲	۱۳/۱	۱۰/۵
	۸/۰	۱۲/۳	۱۰/۱
۲	۸/٤	۱۲/٤	۹/۷
	۷/۳	۱۳/۰	۹/٤

الف: جدول آنالیز واریانس را تشکیل داده و صفر بودن تاثیر متقابل را آزمون کنید و در صورت معنی‌دار نبودن این اثر، با توجه به آن، اثر رژیم و نیز اثر دارو را مقایسه کنید.
ب: با مشاهده نتایج آزمون‌های فوق آیا می‌توان فرضیه یکسان بودن اثر دو تزریق را قبول کرد؟ در صورت قبول این فرضیه آنالیز مناسب را برای اطلاعات فوق انجام دهید.

۷. اطلاعات زیر مربوط است به مشاهداتی درباره دوام ٤ نوع لاستیک اتومبیل که در ۵ نوع جاده مورد آزمایش قرار گرفته است. در هر کدام از ۵ جاده ٤ نمونه از هر نوع لاستیک اتومبیل آزمایش شده است. جدول آنالیز واریانس را تکمیل کنید و فرضیه‌ها و نتایج را بیان کنید.

	مجموع مجذورات
بین لاستیک‌ها	۱۹۰/۱
بین جاده‌ها	۲۰۰/۲
زیر جمع	۵۰۰/٤
جمع	۸۰٤/٦

۸. در یک مطالعه مربوط به مراجعین مرد از بیماران قلبی، بیماران به تفکیک سن و گروه‌های ۳۹-۲۰ و ٤۹-٤۰ و ۵۰ سال به بالا و به تفکیک قد به گروه‌های ٦۸-٦۰ و ۷۰-٦۸ و بالاتر از ۷۰ اینچ طبقه‌بندی شده‌اند. از ترکیب هر گروه سنی و قد، ۵ بیمار به طور تصادفی انتخاب کرده و فشار خون ماکزیمم و فشار خون می‌نیمم برای هر یک از افراد این نمونه اندازه‌گیری شده و نتیجه در جدول زیر آورده شده است:

سن (سال)	قد (اینچ)					
	۶۸ - ۶۰		۷۰ - ۶۸		بالاتر از ۷۰	
	فشار خون (میلی متر جیوه)		فشار خون (میلی متر جیوه)		فشار خون (میلی متر جیوه)	
	ماکزیمم	مینیمم	ماکزیمم	مینیمم	ماکزیمم	مینیمم
۲۰-۳۹	۱۱۸	۸۴	۱۵۴	۷۸	۱۱۴	۷۴
	۱۲۰	۸۲	۱۳۶	۷۸	۱۱۴	۶۶
	۱۳۶	۶۴	۱۲۶	۷۸	۱۳۶	۸۴
	۱۲۲	۷۴	۱۲۴	۶۶	۱۰۴	۶۸
	۱۱۸	۷۲	۱۱۴	۶۸	۱۰۶	۷۶
۴۰-۴۹	۱۶۰	۸۸	۱۴۰	۷۰	۱۳۰	۹۰
	۱۵۲	۹۶	۱۶۴	۹۰	۱۳۰	۷۹
	۱۴۸	۶۸	۱۲۶	۸۰	۱۱۶	۶۸
	۱۰۴	۷۴	۱۱۴	۶۸	۱۵۴	۸۲
	۱۲۲	۷۲	۱۲۸	۵۸	۱۲۶	۷۹
۵۰ و بالاتر	۱۵۰	۵۸	۱۴۶	۷۶	۱۴۰	۷۶
	۱۴۸	۹۰	۱۴۲	۸۴	۱۷۶	۷۸
	۱۱۰	۶۸	۱۷۴	۱۰۸	۱۱۶	۷۶
	۱۰۸	۵۸	۱۴۷	۷۸	۱۴۲	۹۰
	۱۲۴	۷۲	۱۵۸	۷۶	۱۱۲	۶۰

آنالیز واریانس را اولاً برای فشار خون ماکزیمم و ثانیاً برای فشارخون می‌نیمم انجام دهید.

۹. جدول زیر اطلاعات مربوط به سن و فشارخون را که در بررسی سلامت و بیماری در استان قم بدست آمده است نشان می‌دهد. یکسان بودن توزیع شاخص فشار خون را در چهار گروه سنی آزمون کنید.

سن (سال) / فشار خون	۱۲-۲۴	۲۵-۴۴	۴۵-۶۹	+۷۰	جمع	رتبه وسط گروه
طبیعی	۲۵۶	۱۷۱	۹۱	۷	۵۲۵	۲۶۳
مرزی	۳	۲	۴	۱	۱۰	۵۳۰/۵
افزایش یافته	۶	۱۱	۱۳	۵	۳۵	۵۵۳
جمع	۲۶۵	۱۸۴	۱۰۸	۱۳	۵۷۰	
میانگین	۲۷۲/۵۹	۲۸۳/۲۴	۳۰۷/۸۱	۳۹۵/۱۲		

فصل هشتم
بستگی بین صفات

۸-۱. مقدمه

در فصول گذشته تنها مطالعه یک صفت در جامعه مورد نظر بوده است. ولی در بسیاری از مسائل آماری مطالعه دو یا چند صفت برای یک فرد و کشف و تعیین روابط بین آنها مطرح می‌گردد. مطالب این فصل به طور عمده به بیان ارتباط بین دو صفت اختصاص دارد. در قسمت ۸-۲ بستگی بین دو صفت کمی و در قسمت ۸-۳ بستگی بین دو صفت کیفی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۸-۲. مطالعه بستگی بین دو صفت کمی

در این قسمت به بحث درباره دو شیوه‌ای که آنالیز رگرسیون[1] و همبستگی[2] نامیده می‌شوند مبادرت می‌گردد.

در اینجا ابتدا مفهوم بستگی بین دو صفت را بیان می‌کنیم. دو صفت را در صورتی مستقل[3] (نابسته) از یکدیگر گویند که توزیع یکی برحسب مقادیر مختلف از صفت دیگر تغییر نکند. این بستگی دوسوئی است. یعنی اگر صفت X مستقل از Y باشد، صفت Y نیز مستقل از X خواهد بود. مثلاً مقدار هموگلوبین و تعداد گلبولهای قرمز خون وقتی از یکدیگر مستقل هستند که توزیع هموگلوبین به ازاء مقادیر مختلف از تعداد گلبول قرمز (وبرعکس) یکسان باشند. به عبارت دیگر با تغییر تعداد گلبول قرمز، توزیع هموگلوبین و یا با تغییر مقدار هموگلوبین، توزیع تعداد گلبولهای قرمز تغییر نکند. در صورتیکه شرط فوق برقرار نباشد، دو صفت وابسته خواهند بود.

دانستن توزیع یک صفت بر حسب مقادیر مختلف از صفت دوم، در حالت کلی نمی‌تواند

1. Regression
2. Correlation
3. Independent

چگونگی توزیع صفت دوم برحسب این صفت را مشخص کند. بنابراین مطالعه نوع بستگی بین دو صفت با داشتن توزیع توأم آنها و یا انتخاب نمونه تصادفی از این توزیع ممکن می‌گردد. به این ترتیب، در مطالعه همبستگی، توزیع توام دو صفت در نظر گرفته می‌شود و هیچ گونه محدودیتی برای این متغیرها منظور نمی‌گردد. مانند حالتی که افراد، به طور تصادفی از جامعه‌ای انتخاب شوند و صفات مورد نظر برای هر یک از این افراد اندازه‌گیری شوند. در این حالت می‌توان تبعیت هر صفت را از صفت دیگر مورد بررسی قرار داد.

حالت دیگر یعنی آنالیز رگرسیون هنگامی پیش می‌آید که تنها تبعیت یک صفت از صفت یا صفات دیگر مورد بررسی باشد. در این حالت لزومی ندارد که انتخاب افراد کاملا تصادفی باشد و می‌توان توزیع صفت اول را به ازاء مقادیر مختلف ولی ثابت از صفات دیگر بررسی کرد. مثلا اگر از جامعه ساکنان یک منطقه نمونه‌ای تصادفی از افراد انتخاب کرده و دو صفت قد و وزن را برای هر یک از افراد نمونه اندازه‌گیری کنیم، در این صورت می‌توان هم همبستگی بین دو صفت در جامعه و هم تبعیت هر یک از صفات را نسبت به صفت دیگر مطالعه کرد. ولی اگر در این مطالعه ابتدا افراد جامعه را نسبت به صفت قد گروه بندی کنیم و سپس از گروه‌های مختلف نمونه‌هایی انتخاب و وزن این افراد را اندازه‌گیری کنیم، در این صورت می‌توان چگونگی تبعیت توزیع وزن را با قد مطالعه کرد، در صورتیکه مطالعه چگونگی تبعیت توزیع قد با وزن مقدور نخواهد بود.

۸-۲-۱. آنالیز همبستگی

همانطور که قبلا ذکر شد مطالعه بین دو صفت در یک جامعه هنگامی مطرح می‌گردد که افراد به طور تصادفی از این جامعه انتخاب شوند و برای هر یک از این افراد هر دو صفت اندازه‌گیری شده کمیت تصادفی باشند.

اینک این سوال مطرح می‌شود که از چه ملاکی استفاده کنیم تا هر قدر شدت همبستگی دو صفت بیشتر باشد این ملاک بزرگتر و برعکس کوچکتر شود؟

یکی از بهترین این ملاک‌ها، ضریب همبستگی پیرسون[1] است که برای جامعه معمولاً با علامت ρ مشخص می‌گردد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

1. Pearson's correlation coefficient

$$\rho = \frac{E[(X-EX)(Y-EY)]}{\sqrt{E(X-EX)^{۲}E(Y-EY)^{۲}}} \qquad (۱-۸)$$

صورت این کسر را کواریانس[1] X و Y می‌نامند و با σ_{xy} نشان می‌دهند. ضمنا از مطالب قسمت ۲-۳ و ۳-۹ می‌دانیم که عبارت زیر رادیکال در مخرج کسر همان حاصلضرب واریانس X در واریانس Y است و بدین ترتیب می‌توان رابطه (۸-۱) را به صورت زیر نوشت:

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^{۲}\sigma_y^{۲}}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x.\sigma_y} \qquad (۲-۸)$$

برآورد ρ به توسط نمونه، که معمولا با r نشان داده می‌شود، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$r = \frac{\frac{\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{n-۱}}{\sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})^{۲}}{n-۱} \times \frac{\sum(Y-\bar{Y})^{۲}}{n-۱}}} \qquad (۳-۸)$$

که در آن $\bar{X}$ معرف میانگین Xها و $\bar{Y}$ معرف میانگین Yها و n معرف حجم نمونه است. در محاسبات، بیشتر از شکل ساده رابطه (۸-۳) که در زیر آمده است، استفاده می‌گردد:

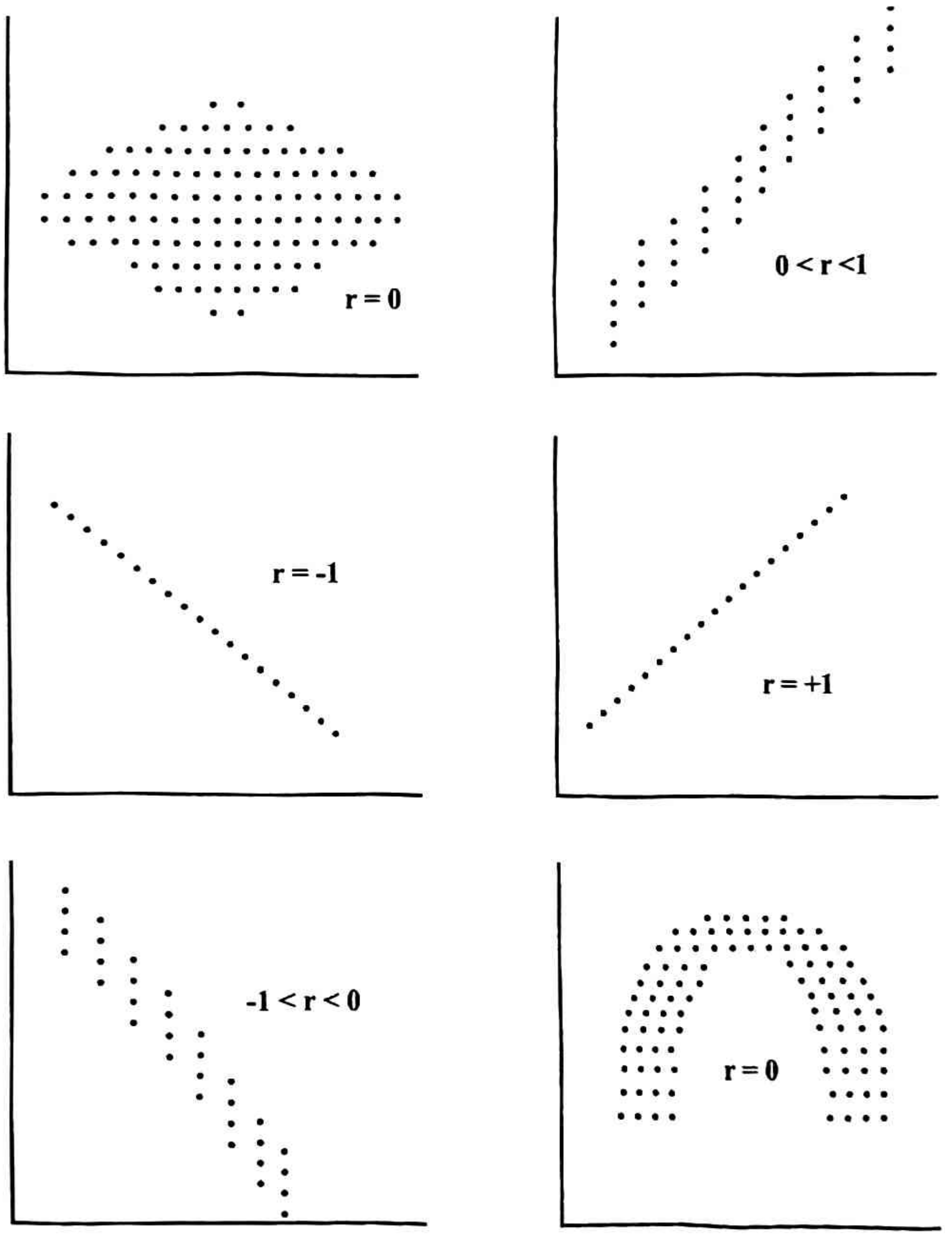
$$r = \frac{n\sum X_iY_i - \sum X_i \sum Y_i}{\sqrt{[n\sum X_i^{۲} - (\sum X_i)^{۲}][n\sum Y_i^{۲} - (\sum Y_i)^{۲}]}} \qquad (٤-۸)$$

واضح است که اگر در رابطه فوق n مساوی با N یعنی حجم جامعه گردد r هم برابر ρ خواهد شد. براساس تعریف فوق ضریب همبستگی همواره مقادیرش را بین ۱- تا ۱+ اختیار می‌کند.

اگر دو صفت در یک جامعه مستقل از هم باشند، مقدار ρ برابر صفر خواهد شد، ولی صفر بودن ضریب همبستگی دلیلی برای مستقل بودن دو صفت از یکدیگر نمی‌باشد، بلکه صفر بودن به این معنی است که دو صفت ناهمبسته[2] بوده و بین آنها همبستگی خطی وجود ندارد (شکل ۸-۱)

1. Covariance
2. Uncorrelated

گرچه ممکن است بین آنها رابطه‌ای از نوع غیرخطی وجود داشته باشد. تنها موقعی صفر بودن ضریب همبستگی دال بر مستقل بودن دو صفت از یکدیگر است که توزیع توام آن دو نرمال باشد.



(شکل ۸-۱)

ضریب همبستگی ۱+ مبین همبستگی مستقیم و کامل، ضریب همبستگی ۱- مبین همبستگی معکوس و کامل، ضریب همبستگی صفر ناهمبسته و سایر مقادیر بین ۱- تا ۱+ همبستگی ناقص به شمار می‌آید (شکل ۸-۱). از آنجا که توزیع توأم بیشتر صفاتی که در علوم تجربی مورد مطالعه قرار می‌گیرد، کم و بیش از نوع توزیع نرمال است، بحث این کتاب تنها به همین حالت محدود

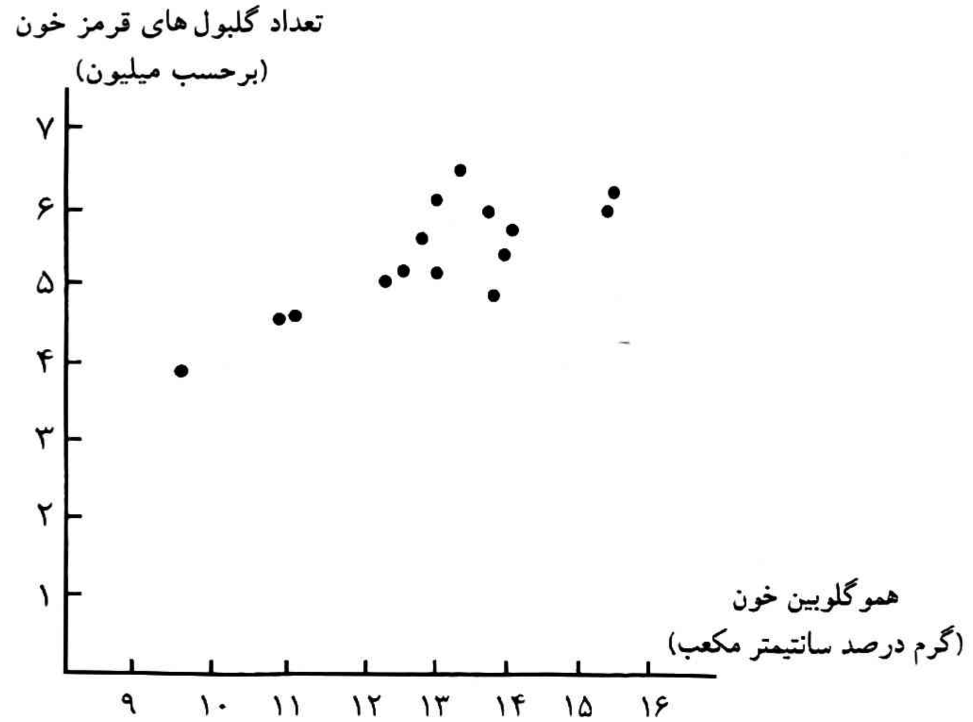
می‌گردد و در این حالت صفر بودن ضریب همبستگی با مستقل بودن دو صفت مترادف است.

اینک گیریم محققی بخواهد همبستگی بین دو متغیر هموگلوبین و تعداد گلبولهای قرمز خون را که اطلاعات آن در جدول ۸ -۱ آمده است مورد مطالعه قرار دهد. به علاوه گیریم مطالعه این محقق محدود به همین اطلاعات بوده و فرض شود که این ۱۵ مورد، کل جامعه مورد مطالعه را تشکیل دهند. حال اگر به طور دلخواه یکی از دو متغیر مورد بحث (هموگلوبین) را به X و دیگری (تعداد گلبولهای قرمز) را به Y نشان دهیم، می‌توان این اطلاعات را به صورت نقاطی که به آنها نمودار پراکنش[1] می‌گویند روی دستگاه مختصات پیاده نمود (شکل ۸-۲) و با توجه به وضع قرار گرفتن نقاط حاصل، تا حدی درباره خطی بودن این ارتباط و نیز شدت همبستگی قضاوت کرد.

جدول ۸-۱. نتایج مشاهدات مقدار هموگلوبین و تعداد گلبولهای قرمز خون و محاسبات مقدماتی برای تعیین ضریب همبستگی

شماره ترتیب (i)	هموگلوبین (گرم در صد سانتیمتر مکعب) X_i (رتبه)	تعداد گلبولهای قرمز در یک میلیمتر مکعب بر حسب میلیون (رتبه) Y_i	X_i^2	Y_i^2	X_iY_i
۱	۹/۸ (۱)	۴/۳ (۱)	۹۶/۰۴	۱۸/۴۹	۴۲/۱۴
۲	۱۲/۸ (۵)	۵/۹ (۱۰)	۱۶۳/۸۴	۳۴/۸۱	۷۵/۵۲
۳	۱۳/۲ (۷/۵)	۵/۳ (۷/۵)	۱۷۴/۲۴	۲۸/۰۹	۶۹/۹۶
۴	۱۵/۷ (۱۵)	۶/۰ (۱۱/۵)	۲۴۶/۴۹	۳۶/۰۰	۹۴/۲۰
۵	۱۱/۳ (۳)	۴/۹ (۳/۵)	۱۲۷/۶۹	۲۴/۰۱	۵۵/۳۷
۶	۱۴/۳ (۱۳)	۵/۱ (۵/۵)	۲۰۴/۴۹	۲۶/۰۱	۷۲/۹۳
۷	۱۲/۹ (۶)	۵/۳ (۷/۵)	۱۶۶/۴۱	۲۸/۰۹	۶۸/۳۷
۸	۱۳/۲ (۷/۵)	۶/۳ (۱۳/۵)	۱۷۴/۲۴	۳۹/۶۹	۸۳/۱۶
۹	۱۱/۲ (۲)	۴/۹ (۳/۵)	۱۲۵/۴۴	۲۴/۰۱	۵۴/۸۸
۱۰	۱۲/۶ (۴)	۵/۱ (۵/۵)	۱۵۸/۷۶	۲۶/۰۱	۶۴/۲۶
۱۱	۱۵/۵ (۱۴)	۶/۳ (۱۳/۵)	۲۴۰/۲۵	۳۹/۶۹	۹۷/۶۵
۱۲	۱۳/۷ (۱۰)	۴/۸ (۲)	۱۸۷/۶۹	۲۳/۰۴	۶۵/۷۶
۱۳	۱۳/۴ (۹)	۶/۵ (۱۵)	۱۷۹/۵۶	۴۲/۲۵	۸۷/۱۰
۱۴	۱۳/۹ (۱۱)	۶/۰ (۱۱/۵)	۱۹۳/۲۱	۳۶/۰۰	۸۳/۴۰
۱۵	۱۴/۰ (۱۲)	۵/۷ (۹)	۱۹۶/۰۰	۳۲/۴۹	۷۹/۸۰۰
جمع	۱۹۷/۵۰	۸۲/۴۰	۲۶۳۴/۳۵	۴۵۸/۶۸	۱۰۹۴/۵۰

1. Scatter diagram



شکل ۸-۲. نمودار پراکنش اطلاعات مربوط به هموگلوبین و تعداد گلبول قرمز خون

این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش یکی از دو صفت به طور متوسط دیگری نیز افزایش می‌یابد. حال به منظور بیان شدت همبستگی با استفاده از فرمول (۸-۴) ضریب همبستگی را بین دو صفت محاسبه می‌کنیم که عبارت است از:

$$\rho = \frac{۱۵ \times ۱۰۹۴/۵۰ - ۱۹۷/۵۰ \times ۸۲/۴۰}{\sqrt{[۱۵ \times ۲۶۳۴/۳۵ - (۱۹۷/۵)^۲][۱۵ \times ۴۵۸/۶۸ - (۸۲/۴)^۲]}} = ۰/۶۷$$

بدین ترتیب، نتیجه می‌شود که در این جامعه بین دو متغیر هموگلوبین و تعداد گلبولهای قرمز خون همبستگی مستقیم و ناقص وجود دارد.

۸-۲-۲. حدود اعتماد ضریب همبستگی

در مطالعات پزشکی و بهداشتی به ندرت می‌توان اندازه‌گیری صفات را برای کل افـراد جامعـه انجام داد و معمولاً بایستی بتوسط ضریب همبستگی که برای نمونه محاسبه مـی‌شـود، نسـبت بـه ضریب همبستگی در جامعه قضاوت نمود.

همانطور که در بیان حدود اعتماد میانگین، اطلاع از توزیع نمونه‌ای $\overline{X}$ ضـروری اسـت، بـرای بیان حدود اعتماد ضریب همبستگی هم اطلاع از توزیع نمونه‌ای r لازم می‌باشد. بـه عبـارت دیگـر باید بدانیم که اگر فرضاً در مثال مذکور در قسـمت ۸-۲-۱ اطلاعـات داده شـده نمونـه‌ای از یـک جامعه مورد نظر باشد و انتخاب نمونه‌های ۱۵ تایی را تکرار کنیم و برای هـر بـار، مقـدار ضـریب همبستگی یعنی r را محاسبه نماییم، توزیع r ها به چه صورت خواهد شـد و چگونـه مـی‌تـوان بـه توسط این توزیع حدود اعتماد ρ را محاسبه کرد؟

در آمار ریاضی ثابت می‌شود که اگر توزیع توأم دو صفت مورد مطالعـه نرمـال باشـد، چنانچـه متغیر r را با استفاده از رابطه (۸-۵) به ω تبدیل کنیم:

$$\omega=\frac{۱}{۲}Ln\frac{۱+r}{۱-r} \qquad (۸-۵)$$

متغیر جدید یعنی ω به توزیع نرمال نزدیک خواهد بود و میانگین و واریـانس ایـن توزیـع بـه ترتیب عبارتند از:

$$E(\omega)=\mu_{\omega}=\frac{۱}{۲}Ln\frac{۱+\rho}{۱-\rho} \qquad (۸-۶)$$

$$E(\omega-\mu_{\omega})^{۲}=\sigma^{۲}{}_{\omega}=\frac{۱}{n-۳} \qquad (۸-۷)$$

در روابط فوق Ln همان لگاریتم پایه طبیعی است و مقدار e تقریباً برابر ۲/۷۱۸۳ است.

برای تبدیل r به ω و بالعکس نیازی به محاسبات لگاریتمی نیست و با مراجعه به جـدول VIII می‌توان مستقیماً مقادیر مربوطه را بدست آورد. (در صورتی که r منفی باشد ω را برای مقدار مثبت آن محاسبه کرده و سپس علامت آن را تغییر می‌دهیم).

اینک برای محاسبه حدود اعتماد ρ باتوجه به مطالب قسمت ۵-٤ ابتدا حدود اعتماد μ_ω را بصورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\text{(حد بالا)}\quad \mu_\omega = \frac{۱}{۲} Ln \frac{۱+r}{۱-r} + z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \times \frac{۱}{\sqrt{n-۳}}$$

$$\text{(حد پایین)}\quad \mu_\omega = \frac{۱}{۲} Ln \frac{۱+r}{۱-r} - z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \times \frac{۱}{\sqrt{n-۳}} \qquad (۸-۸)$$

و سپس بتوسط رابطه (۸-۵) و با استفاده از جدول VIII حدود اعتماد ρ محاسبه می‌شود.

در مثال هموگلوبین و گلبول قرمز خون حدود اعتماد ضریب همبستگی برای ۹۵ درصد اطمینان عبارت خواهد بود از:

$$\text{(حد بالا)}\quad \mu_\omega = \frac{۱}{۲} Ln \frac{۱+۰/٦۷}{۱-۰/٦۷} + ۱/۹٦ \times \frac{۱}{\sqrt{۱۵-۳}}$$

$$= ۰/۸۱۱ + ۱/۹٦ \times ۰/۲۸۸۷$$

$$= ۱/۳۷۷$$

$$\text{(حد پایین)}\quad \mu_\omega = ۰/۸۱۱ - ۱/۹٦ \times ۰/۲۸۸۷$$

$$= ۰/۲٤۵$$

اینک چنانچه با استفاده از جدول VIII مقادیر ω را به ρ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$\text{(حد بالا)}\quad \rho \simeq ۰/۸۸$$

$$\text{(حد پایین)}\quad \rho \simeq ۰/۲٤$$

بنابراین فاصله ۰/۲٤ تا ۰/۸۸ با ۹۵ درصد اعتماد ضریب همبستگی هموگلوبین و تعداد گلبولهای قرمز خون را شامل می‌گردد.

۸-۲-۳. آزمون اختلاف ضریب همبستگی با صفر

گرچه براساس محاسبه حدود اعتماد ρ که در قسمت قبل ذکر شد با ملاحظه اینکه آیا این حدود صفر را شامل می‌شود یا خیر، می‌توان فرض صفر بودن ضریب همبستگی در جامعه را آزمون کرد. ولی از آنجا که در بیشتر بررسیهای پزشکی و بهداشتی مطالعه روی نمونه‌ها انجام می‌گیرد و ممکن است محققی صرفاً به دلیل مشاهده همبستگی روی یک نمونه اشتباهاً بوجود

ارتباط بین دو صفت قضاوت نماید، در حالیکه همبستگی حاصل با صفر اختلاف معنی‌دار نداشته باشد، لذا مناسب است که دستور چنین آزمونی بدون محاسبه حدود اعتماد برای ρ نیز ذکر گردد.

دستور انجام این آزمون عیناً مانند دستور قسمت ٦-٣ بشرح زیر می‌باشد:

$$H_0 : \rho = ۰$$

$$H_1 : \rho \neq ۰$$

و از آنجا ملاک آزمون برابر است با:

$$z = \frac{\omega - ۰}{\frac{۱}{\sqrt{n-۳}}} \qquad (۹-۸)$$

در صورتی که قدر مطلق ملاک z محاسبه شده از $z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}$ بزرگتر باشد، فرضیه H_0 رد و فرضیه H_1 پذیرفته می‌شود. در غیر این صورت گوییم فرضیه H_0 رد نمی‌شود.

در مثال مورد بحث خواهیم داشت:

$$z = \frac{۰/۸۱۱}{۰/۲۸۸۷} = ۲/۸۱$$

که در مقایسه با z جدول (برای $\alpha = ۰/۰۱$ برابر ۲/۵۷ است)، نتیجه می‌شود که با اطمینان بیش از ۰/۹۹ می‌توان فرضیه H_0 را رد کرد و قضاوت نمود که بین این دو صفت درجامعه، همبستگی وجود دارد.

فرمول حجم نمونه برای محاسبه ضریب همبستگی پیرسون در آزمون دو دامنه برابر است با:

$$n = \frac{\left(Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} + z_{۱-\beta}\right)^{۲}}{\omega^{۲}} + ۳ \qquad (۱۰-۸)$$

برای مثال اندازه حجم نمونه برای ضریب همبستگی $\rho = ۰/۳$ ، $\alpha = ۰/۰۵$ و $\beta = ۰/۲۰$ برابر است با:

$$n = \frac{(۱/۹٦ + ۰/۸٤)^{۲}}{(\frac{۱}{۲} Ln \frac{۱+۰/۳}{۱-۰/۳})^{۲}} + ۳$$

$$n = \frac{(۲/۸)^{۲}}{(۰/۳۱)^{۲}} + ۳ = ۸۵$$

۸-۲-٤. ضریب همبستگی بین دو صفت رتبه‌ای (ضریب همبستگی اسپیرمن [1])

چنانچه در محاسبات ضریب همبستگی داده‌ها از نوع رتبه‌ای باشد و یا به جای اعداد اصلی از رتبه آنها استفاده شود، این ضریب همبستگی را ضریب همبستگی اسپیرمن می‌نامند، محاسبه ضریب همبستگی اسپیرمن برای اطلاعات جدول ۸-۱ که به صورت رتبه‌ای نیز ارائه شده به شرح زیر است.

اعداد داخل پرانتز رتبه مقادیر مربوطه را نشان می‌دهد، با استفاده از فرمول (۸-٤) خواهیم داشت:

$$r_s = \frac{۱۵\times۱۱۱۵/۵-۱۲۰\times۱۲۰}{\sqrt{[۱۵\times۱۲۳۹/۵-۱۲۰^۲]\times[۱۵\times۱۲۳۷/۵-۱۲۰^۲]}} = ۰/۵٦$$

چنانچه ملاحظه می‌شود ضریب همبستگی حاصل (۰/۵٦) با ضریب همبستگی مربوط به اعداد اصلی (۰/٦۷) دارای اختلاف چندان نمی‌باشد و در فاصله حدود اعتماد آن قرار دارد.

۸-۲- ۵. آنالیز رگرسیون

همانطور که قبلاً بیان شد، آنالیز رگرسیون تبعیت توزیع یک صفت را از صفت یا صفات دیگر، مورد بررسی قرار می‌دهد. مطالعه چگونگی تغییرات توزیع یک صفت نسبت به صفت دیگر در حالت کلی بسیار مشکل و تقریباً غیر ممکن است. از این رو معمولاً تنها به مطالعه چگونگی تغییرات پارامترهای این توزیع و بخصوص میانگین آن مبادرت می‌شود.

برای روشن شدن مطلب فرض کنید مطالعه تغییرات میانگین فشار خون سیستولیک جامعه مردان ٦۰ سال به بالا در رابطه با سن آنها مورد نظر باشد. بدین منظور می‌توان جامعه مردان ٦۰ سال به بالا را به زیر جامعه‌هایی که سن آنها تقریباً مساوی است، تقسیم نمود و به بررسی تبعیت میانگین فشار خون این زیر جامعه‌ها بر حسب سن اقدام کرد.

در این مثال فشار خون سیستولیک را متغیر تابع و سن را متغیر مستقل می‌نامند و طبق معمول متغیر مستقل را به X و متغیر تابع را به Y نشان می‌دهند. بدین ترتیب برای هر فرد این جامعه دو اندازه X و Y بدست خواهد آمد.

علامت $\mu_{y.x}$ که میانگین Y به شرط X خوانده می‌شود. معرف میانگین Yهایی است که X آنها برابر مقدار ثابت x است. بنا به تعریف $\mu_{y.x}$ را رگرسیون Y بر حسب X نیز می‌نامند. بر این

1. Spearman's correlation coefficient

قیاس علامت $\sigma^2_{y.x}$ معرف واریانس Yهایی است که X آنها برابر مقدار ثابت x باشد. در محدوده مطالبی که در دنباله این بحث در سایر قسمتهای این فصل ارائه می‌گردد، فرض بر این است که $\sigma^2_{y.x}$برای Xهای مختلف ثابت است و به علاوه در مواردی که مبادرت به انجام آزمونی می‌گردد و یا حدود اعتماد برای پارامتری تعیین می‌شود، فرض بر این است که توزیع Y برای X ثابت، نرمال باشد.

در بسیاری از کاربردهای مهم تئوری رگرسیون، منحنی رگرسیون برای طول میدان مقادیر مورد مطالعه از X ، به صورت یک خط مستقیم است. در این حالت گوییم که رگرسیون خطی وجود دارد. در این صورت، معادله میانگین Y بر حسب X را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mu_{y.x} = A+BX \qquad (۱۱-۸)$$

که در آن پارامترهای A و B ضرایب رگرسیون نامیده می‌شوند.

لازم به تذکر است که در صورت نرمال بودن توزیع توام دو صفت، همواره دو فرض فوق صادق بوده و نیز رگرسیون هر یک از دو متغیر بر حسب متغیر دیگر خطی مستقیم است.

۸-۲-۶. برآورد ضرایب رگرسیون

در معادله رگرسیون (۸-۱۱)، ضرایب A و B پارامترهایی هستند که مربوط به جامعه می‌باشند و براساس نمونه، برآورد خطی ناتور این پارامترها که توزیع نمونه‌ای آنها دارای حداقل واریانس باشد، از روش حداقل مجذورات[1] بدست می‌آید. در این روش برآورد پارامترهای A و B که به ترتیب، آنها را با a و b نشان می‌دهیم، بایستی چنان محاسبه شوند که مجموع مجذورات فاصله نقاط تا خط رگرسیون، یعنی $[y - (a+bx)]^2$ حداقل شود، بر این اساس مقدار b عبارت خواهد بود از:

$$b = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum Xi)^2}{n}} \qquad (۱۲-۸)$$

1. Least square

و مقدار a عبارت است از:

$$a = \bar{Y} - \bar{X}b \qquad (۱۳-۸)$$

بدین ترتیب اگر برآورد $\mu_{y.x}$ را با $_x\bar{Y}$ نشان دهیم، داریم:

$$_x\bar{Y} = a + bX \qquad (۱٤-۸)$$

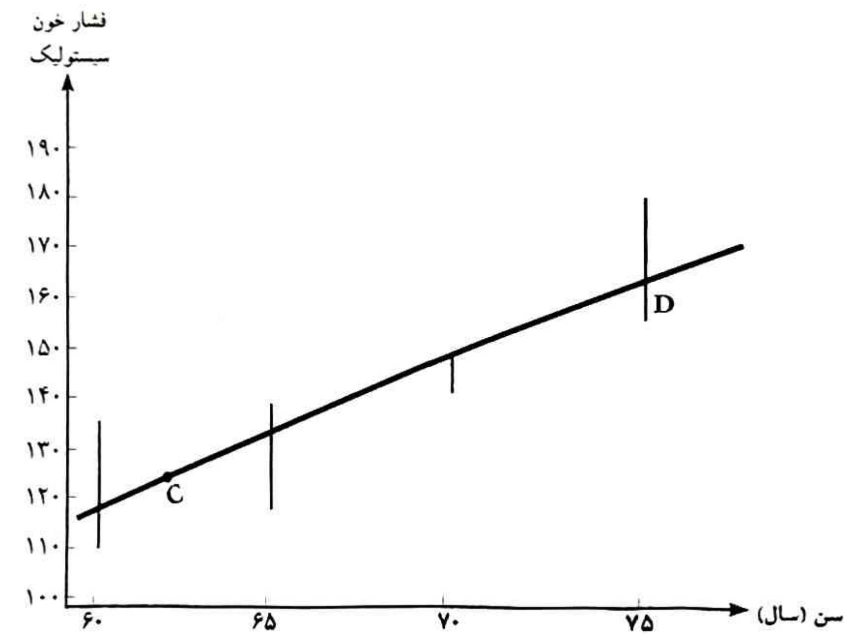
که در آن a و b بتوسط روابط (۸-۱۲) و (۸-۱۳) محاسبه می‌شوند.

اینک در مثال مذکور در ۸-۲-۵ که مربوط به مطالعه فشار خون سیستولیک جامعه مردان ٦۰ سال به بالا با سن است، از زیر جامعه‌هایی که فی المثل سن آنها ٦۰، ٦٥، ۷۰، ۷٥ است نمونه‌هایی تصادفی انتخاب و فشار خون سیستولیک هر فرد را اندازه می‌گیریم که نتایج در جدول ۸-۲ آمده است:

جدول ۸ -۲. اطلاعات مربوط به سن و فشار خون سیستولیک

شماره ردیف (i)	سن (سال) X_i	فشارخون سیستولیک (میلی مترجیوه) Y_i	X_i^2	Y_i^2	X_iY_i
۱	٦۰	۱۱۰	۳٦۰۰	۱۲۱۰۰	٦٦۰۰
۲	٦۰	۱۳٥	۳٦۰۰	۱۸۲۲٥	۸۱۰۰
۳	٦۰	۱۲۰	۳٦۰۰	۱٤٤۰۰	۷۲۰۰
٤	٦٥	۱۲۰	٤۲۲٥	۱٤٤۰۰	۷۸۰۰
٥	٦٥	۱٤۰	٤۲۲٥	۱۹٦۰۰	۹۱۰۰
٦	٦٥	۱۳۰	٤۲۲٥	۱٦۹۰۰	۸٤٥۰
۷	٦٥	۱۳٥	٤۲۲٥	۱۸۲۲٥	۸۷۷٥
۸	۷۰	۱٥۰	٤۹۰۰	۲۲٥۰۰	۱۰٥۰۰
۹	۷۰	۱٤٥	٤۹۰۰	۲۱۰۲٥	۱۰۱٥۰
۱۰	۷٥	۱۷۰	٥٦۲٥	۲۸۹۰۰	۱۲۷٥۰
۱۱	۷٥	۱۸٥	٥٦۲٥	۳٤۲۲٥	۱۳۸۷٥
۱۲	۷٥	۱٦۰	٥٦۲٥	۲٥٦۰۰	۱۲۰۰۰
جمع	۸۰٥	۱۷۰۰	٥٤۳۷٥	۲٤٦۱۰۰	۱۱٥۳۰۰

چنانچه نمودار پراکنش این اطلاعات را در دستگاه مختصات رسم کنیم، خواهیم دید که به طور متوسط تغییرات Y به شرط X تقریبا خطی است (شکل ۸-۳)



شکل ۸–۳. نمودار پراکنش و خط رگرسیون اطلاعا ت مربوط به سن و فشار خون سیستولیک

با استفاده از روابط (۸–۱۲) و (۸–۱۳) مقادیر a و b را محاسبه می‌کنیم که برای مثال مورد بحث خواهیم داشت:

$$b = \frac{۱۱۵۳۰۰ - \frac{۸۰۵ \times ۱۷۰۰}{۱۲}}{۵۴۳۷۵ - \frac{(۸۰۵)^۲}{۱۲}} = ۳/۳۷$$

$$a = \frac{۱۷۰۰}{۱۲} - ۳/۳۷\left(\frac{۸۰۵}{۱۲}\right)$$
$$= -۸۴/۴۱$$

و معادله خط رگرسیون به صورت :

$$_{x}\overline{Y} = -۸۴/۴۱ + ۳/۳۷\,X$$

تعیین می‌شود و در شکل (۸–۳) نمودار آن با بدست آوردن مختصات دو نقطه این خط رسم شده است:

$$C \left| \begin{array}{l} ۶۰ \\ ۱۱۷/۷۹ \end{array} \right. \qquad \text{و} \qquad D \left| \begin{array}{l} ۷۵ \\ ۱۶۸/۳۴ \end{array} \right.$$

و برای محاسبه $s_{y.x}^{۲}$ که برآوردی از $\sigma^{۲}{}_{y.x}$ است، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$s_{y.x}^{۲} = \frac{n-۱}{n-۲}(s_y^{۲} - b^{۲}s_x^{۲}) \qquad (۱۵-۸)$$

که در مثال مورد بحث، خواهیم داشت:

$$s_x^{۲} = \frac{۵٤۳۷۵ - \frac{(۸۰۵)^{۲}}{۱۲}}{۱۱} = ۳۳/۹۰$$

$$s_y^{۲} = \frac{۲٤٦۱۰۰ - \frac{(۱۷۰۰)^{۲}}{۱۲}}{۱۱} = ٤۷۸/۷۹$$

$$s_{y.x}^{۲} = \frac{۱۱}{۱۰}(٤۷۸/۷۹ - ۳/۳۷^{۲} \times ۳۳/۹۰)$$
$$= ۱۰۳/۱٤۷۰$$

۸-۲-۷. آزمون مستقل بودن دو صفت (آزمون اختلاف B با صفر)

یکی از فرضیه‌هایی که در آنالیز رگرسیون، مکرر مورد آزمون قرار می‌گیرد، فرضیه مستقل بودن متغیر Y از متغیر X است. همانطور که قبلا گفته شد در صورتی که متغیر Y از متغیر X مستقل باشد، توزیع Y به شرط X برای مقادیر مختلف X یکسان می‌شود و در نتیجه میانگین Y به ازاء مقادیر مختلف X ، ثابت خواهد بود. به عبارت دیگر تابع تغییرات Y نسبت به X به صورت یک خط که موازی محور X ها است در می‌آید و در نتیجه B برابر صفر می‌شود.

بدین ترتیب می‌توان صفر بودن B را ملاکی برای مستقل بودن دو صفت دانست و برای تعیین مستقل بودن دو متغیر Y و X ، فرضیه صفر بودن B را آزمون کرد و رد شدن آن را دلیل کافی برای وابستگی Y نسبت به X دانست.

به منظور انجام آزمون فرضیه فوق ابتدا طبق رابطه زیر واریانس b را برآورد می‌کنیم:

$$s_b^{۲} = \frac{s_{y.x}^{۲}}{\sum(X-\overline{X})^{۲}} \qquad (۱٦-۸)$$

$$= \frac{s_{y.x}^{۲}}{(n-۱)s_x^{۲}}$$

و آنگاه می‌گوییم، در صورتی که فرض نرمال بودن Y به شرط X صحیح باشد، تحت فرضیه «$B_{\cdot} = ۰$: $H_{\cdot}$» براساس مطالب قسمت ۶–۴ ملاک زیر دارای توزیع t با درجه آزادی n-۲ خواهد شد:

$$t = \frac{b - ۰}{\sqrt{s_b^۲}}$$

$$= \frac{b s_x \sqrt{n-۱}}{s_{y.x}} \qquad (۱۷\text{–}۸)$$

اینک در یک آزمون دو دامنه چنانچه $|t| > t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n-۲)$ باشد، فرضیه $H_{\cdot}$ یعنی مساوی بودن B با صفر را مردود می‌شناسیم و قضاوت می کنیم که Y به X وابسته است. در غیر این صورت فرضیه $H_{\cdot}$ و یا مستقل بودن دو صفت را رد نمی‌کنیم.

در مثال مربوط به سن و فشار خون سیستولیک خواهیم داشت:

$$t = \frac{۳/۳۷ \times \sqrt{۳۳/۹۰} \times \sqrt{۱۱}}{\sqrt{۱۰۳/۱٤۷}}$$

$$= ٦/٤۱$$

چنانچه α یعنی اشتباه نوع اول برابر ۰/۰۱ انتخاب شود، چون قدر مطلق t محاسبه شده (٦/٤۱) از $t_{۰/۹۹۵}(۱۰)$ یعنی ۳/۱۷ بزرگتر است با اشتباه کمتر از ۰/۰۱ فرضیه $H_{\cdot}$ یعنی مساوی بودن B با صفر و یا عدم بستگی بین دو صفت را مردود می‌شناسیم و نتیجه می‌گیریم که Y به X وابسته است.

۸–۲–۸ . حدود اعتماد برای خط رگرسیون

در بیشتر موارد محاسبه حدود اعتماد $\mu_{y.x}$ یعنی خط رگرسیون ضروری می‌گردد که می‌توان با استفاده از رابطه زیرحدود اعتماد α -۱ برای خط رگرسیون بدست می‌آید:

$$\text{(حد بالا)}\quad \mu_{y.x} = \bar{Y}_x + t_{1-\frac{\alpha}{2}} s_{y.x}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(X-\bar{X})^2}{(n-1)s_x^2}}$$

(۱۸-۸)

$$\text{(حد پایین)}\quad \mu_{y.x} = \bar{Y}_x - t_{1-\frac{\alpha}{2}} s_{y.x}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(X-\bar{X})^2}{(n-1)s_x^2}}$$

که در آن مقدار t از جدول شماره V برای ۲ −n درجه آزادی معین می‌گردد. بدین ترتیب در مثال مورد بحث برای ۰/۰۵ = α خواهیم داشت:

$$\text{(حد بالا)}\quad \mu_{y.x} = -۸۴/۴۱ + ۳/۳۷X + t_{۰/۹۷۵}\,(۱۰)\quad ۱۰/۱۵\sqrt{\frac{۱}{۱۲}+\frac{(X-\frac{۸۰۵}{۱۲})^2}{(۱۱)(۳۳/۹۰)}}$$

$$= -۸۴/۴۱ + ۳/۳۷X + ۲۲/۶۳\sqrt{\frac{۱}{۱۲}+\frac{(X-۶۷/۰۸)^2}{۳۷۲/۹۰}}$$

$$\text{(حد پایین)}\quad \mu_{y.x} = -۸۴/۴۱ + ۳/۳۷X - ۲۲/۶۳\sqrt{\frac{۱}{۱۲}+\frac{(X-۶۷/۰۸)^2}{(۳۷۲/۹۰)}}$$

اینک چنانچه X یعنی سن را برابر ۶۲ سال فرض کنیم، حدود اعتماد میانگین فشار خون سیستولیک افرادی که در این سن هستند، برای ۹۵ درصد اطمینان برابر است با :

$$\text{(حد بالا)}\quad \mu_{y.x} = -۸۴/۴۱ + ۳/۳۷ \times ۶۲ + ۲۲/۶۳\sqrt{\frac{۱}{۱۲}+\frac{(۶۲-۶۷/۰۸)^2}{۳۷۲/۹۰}}$$

$$= ۱۳۳/۳۷$$

$$\text{(حد پایین)}\quad \mu_{y.x} = -۸۴/۴۱ + ۳/۳۷ \times ۶۲ - ۲۲/۶۳\sqrt{\frac{۱}{۱۲}+\frac{(۶۲-۶۷/۰۸)^2}{۳۷۲/۹۰}}$$

$$= ۱۱۵/۶۹$$

بدین ترتیب معین می‌شود که حدود ۱۱۵/۶۹ تا ۱۳۳/۳۷ با ۹۵ درصد اعتماد، میانگین فشار خون سیستولیک مردانی را که سن آنها ۶۲ سال است در برمی‌گیرد.

۸-۲-۹. حدود اعتماد Y به ازاء مقدار ثابت از X

رابطه (۸-۱۸) حدود اعتماد میانگین Y را برای یک مقدار ثابت از X بیان می‌کند. در بسیاری موارد ضروری می‌گردد که حدود اعتماد Y برای X ثابت را برای یک مشاهده تنها بدست آوریم. رابطه زیر حدود اعتماد $\alpha - 1$ را برای Y برحسب مقدار X متناظر با آن بیان می‌کند.

$$\text{(حد بالا)}\quad Y = \overline{Y}_x + t_{1-\frac{\alpha}{2}} s_{y.x}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(X-\overline{X})^2}{(n-1)s_x^2}}$$

(۸-۱۹)

$$\text{(حد پایین)}\quad Y = \overline{Y}_x - t_{1-\frac{\alpha}{2}} s_{y.x}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(X-\overline{X})^2}{(n-1)s_x^2}}$$

در مثال فوق برای X= ٦٢ و ۰/۰۵ = α داریم:

$$\text{(حد بالا)}\quad Y = -84/41 + 3/37 \times 62 + 2/23 \times 10/15\sqrt{1+\frac{1}{12}+\frac{(62-67/08)^2}{372/90}}$$

$$=148/83$$

$$\text{(حد پایین)}\quad Y = -84/41 + 3/37 \times 62 - 2/23 \times 10/15\sqrt{1+\frac{1}{12}+\frac{(62-67/08)^2}{372/90}}$$

$$= 100/23$$

۸-۲-۱۰. رگرسیون چند متغیره[1]

معمولاً در علوم پزشکی متغیر وابسته با چندین متغیر مستقل در ارتباط می‌باشد. در این صورت می‌توان رابطه رگرسیون خطی را که تنها برای یک متغیر مستقل بیان کردیم به چند متغیر مستقل تعمیم داد به شکل زیر:

---

1. Multiple regression

$$\mu_{Y.X_1,X_2,...,X_k} = A + B_1X_1 + B_2X_2 + ... + B_kX_k \qquad (۲۰-۸)$$

که در آن پارامترهای A ، B_1 ، B_2 ، ... و B_k را ضرایب رگرسیون می‌نامند. برآورد پارامترهـای A، B_1 ، ... ، B_k را با استفاده ازنرم افزارهای آماری موجود مانند SPSS ، SAS و غیره مـی تـوان بدست آورد که در این صورت برآورد رابطه فوق را به صورت زیر بنویسیم:

$$\overline{Y}_{X_1,X_2,...,X_k} = a + b_1X_1 + b_2 X_2 + ... + B_kX_k \qquad (۲۱-۸)$$

می‌توان با استفاده از نرم افزارهای آماری پارامترهای a ، b_1 ، b_2 ، ... ،b_k را برآورد کرد.

در این معادله a برآورد مقدار متغیر وابسته است وقتی که همـه متغیرهـای مسـتقل برابـر صـفر باشند. ضرایب رگرسیون b_1 تا b_k بیانگر برآورد تغییر اندازه $\overline{Y}$ به ترتیب به ازای یک واحد تغییـر در X_1 تا X_k ها است به شرط اینکه سایر X ها ثابت باشند. این خاصیت به ما اجـازه مـی‌دهـد کـه رابطه متغیر وابسته را با یک متغیر مستقل بررسی کنیم در صورتی که سایر متغیرهای مسـتقل ثابـت باشند.

جدول ۸ -۳ ، نتیجه کامپیوتری محاسبه یک رگرسـیون دو متغیـره را کـه در آن متغیـر وابسـته هموگلوبین خون و متغیرهای مستقل سن و هماتوکریت است در ۲۰ زن نشان می‌دهد، در محاسـبه این جدول از برنامه SPSS استفاده شده است.

جدول ۸ -۳. نتیجه آنالیز واریانس رگرسیون

منبع تغییرات	SS	d.f	MS
رگرسیون (SSR)	۹۳/۳۰	۲	٤٦/٦٥
باقیمانده (SSE)	١٦/٣١	۱۷	۰/۹٦
کل	۱۰۹/٦١	۱۹	$F = \frac{٤٦/٦٥}{۰/۹٦} = ٤٨/٥٩$

جدول فوق نشان می‌دهد که از مجموع مجذورات کل یعنی ۱۰۹/٦١ مقدار ۹۳/۳۰ آن بـه دلیـل استفاده از رگرسیون کاسته شده است که البته با توجه به مقدار F یعنی ٤٨/٥٩ برای درجـه آزادی ۲ و ۱۷ معنی‌دار است. نسبت ۹۳/۳۰ به ۱۰۹/٦١ را بـه R^2 نشـان مـی‌دهنـد و آن را ضـریب تعیـین[1]

1. Coefficient of determination

همبستگی چند متغیره می‌گویند. اینک با توجه به معنی‌دار شدن جدول آنالیز واریانس به ارایه جدول ضرایب رگرسیون که از نرم افزار SPSS نتیجه شده است، اقدام می‌گردد. (جدول ۸-٤)

جدول ۸-٤. ضرایب رگرسیون

متغیرها		ضرایب رگرسیون	خطای معیار	t	اندازه P
ثابت	a	۵/۲۳۹	۱/۲۰٦	٤/۳٤۲	۰/۰۰٤
سن	b_1	۰/۱۱۰	۰/۰۱٦	٦/۷٤۲	۰/۰۰۱
هماتوکریت	b_2	۰/۰۹۷	۰/۰۳۳	۲/۹۷۷	۰/۰۰۸۵

براساس اطلاعات فوق برآورد معادله رگرسیون دو متغیره به شرح زیرمی‌باشد:

$$\overline{Y} = ۵/۲٤ + ۰/۱۱۰\ X_۱ + ۰/۰۹۷\ X_۲$$

که در آن ۵/۲٤ معرف برآورد میانگین هموگلوبین برای کسانی است که سن و هماتوکریت آنها صفر باشد که البته در این مثال معنی ندارد. عدد ۰/۱۱۰ معرف افزایش میانگین هموگلوبین خون به ازای افزایش یک سال سن است در صورتی که هماتوکریت ثابت باشد و عدد ۰/۰۹۷ معرف افزایش میانگین هموگلوبین خون به ازای افزایش یک واحد هماتوکریت است در صورتی که سن ثابت باشد. با توجه به اندازه p ، اطلاعات جدول فوق نشان می‌دهد که هموگلوبین خون پس از حذف اثر هماتوکریت با سن و نیز پس از حذف اثر سن با هماتوکریت در ارتباط می‌باشد.

روش کلی برای آزمون پارامترها در رگرسیون چند متغیره

در کاربرد رگرسیون چند متغیره گاهی لازم می‌شود که وابستگی متغیر پاسخ را با زیرگروهی از متغیرهای مستقل به شرط ثابت نگه داشتن سایر متغیرهای مستقل آزمون کنیم. در ادامه این روش آزمون را در یک مطالعه فرضی شرح می‌دهیم.

گیریم ارتباط فشار خون و متغیرهای چاقی، سیگار و مصرف زیاد نمک با ثابت نگه داشتن تأثیر سن و جنس مورد نظر باشد. در این صورت یکبار مدل رگرسیون را با کلیه متغیرهای ذکر شده (کل پنج متغیر) برازش می‌دهیم و آن را مدل کامل می‌نامیم. بار دیگر این مدل را با حذف متغیرهای مورد نظر (شامل چاقی، سیگار و مصرف زیاد نمک) برازش داده و آن را مدل کاهش یافته می‌نامیم. ملاک این آزمون عبارت است از:

$$F=\frac{SSE(R)-SSE(F)}{df_R-df_F}\div\frac{SSE(F)}{df_F}$$

که SSE(R) مجموع مربعات باقیمانده برای مدل کاهش یافته، SSE(F) مجموع مربعات باقیمانده برای مدل کامل می‌باشد و به همین ترتیب df_R درجه آزادی باقیمانده در مدل کاهش یافته و df_F درجه آزادی باقیمانده در مدل کامل است. معمولاً اطلاعات فوق در خروجی کامپیوتر ارائه می‌شود.

۸-۳. مطالعه بستگی بین دو صفت کیفی

در این حالت می‌توان هر یک از مشاهدات را با توجه به حالات، سطوح و یا طبقات دو صفت مورد مطالعه A و B در گروه‌های مختلف قرار داد. چنانچه حالات مختلف این دو صفت به ترتیب با A_1 ، A_2 ، . . . ، A_r و B_1 ، B_2 ، . . . ، B_c نشان داده شوند، نتیجه گروه‌بندی مشاهدات نسبت به این دو صفت به شکل جدول ۸-۵ است که به آن جدول توافق[1] نیز می‌گویند.

جدول ۸ – ۵.

A	B					جمع
	B_1	B_2	B_3	. . .	B_c	
A_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	. . .	n_{1c}	$n_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	. . .	n_{2c}	$n_{2.}$
A_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	. . .	n_{3c}	$n_{3.}$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
A_r	n_{r1}	n_{r2}	n_{r3}	. . .	n_{rc}	$n_{r.}$
جمع	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	. . .	$n_{.c}$	n

در این جدول r معرف تعداد سطر، c معرف تعداد ستون، n_{ij} معرف تعداد افرادی که از نظر صفت A در گروه A_i و از نظر B در گروه B_j ، $n_{i.}$ معرف تعداد کل افرادی که از نظر صفت A در گروه A_i ، $n_{.j}$ معرف تعداد کل افرادی که از نظر B در گروه B_j و بالاخره n معرف تعداد کل مشاهدات است.

1. Contingency table

در بحث ارتباط دو صفت کیفی هم، می‌توان مانند صفات کمی دو حالت متمایز در نظر گرفت. اول اینکه افراد به صورت تصادفی انتخاب شده و آنگاه با توجه به حالت دوصفت مورد مطالعه، فرد انتخاب شده در یکی از خانه‌های جدول ۸ - ۵ منظور گردد. در این حالت تنها تعداد کل مشاهدات، عددی انتخابی است و برای سایر خانه‌های جدول جز اینکه جمع کل مشاهدات برابر عدد انتخاب شده باشد، هیچگونه محدودیت دیگری وجود نخواهد داشت. دوم اینکه، ابتدا جامعه را برحسب حالات یکی از دو صفت به زیر جامعه‌هایی تقسیم کرده و آنگاه نمونه‌هایی از هر یک از این زیر جامعه‌ها انتخاب کنیم. به عبارت دیگر در حالت اخیر تعداد مشاهدات برای سطر یا ستون جمع، انتخابی است.

روش آزمون فرضیه مستقل بودن دو صفت در هر دو حالت فوق یکسان است. مشابه آنچه قبلا در شروع فصل در مورد دو صفت کمی بیان شد، در مورد دو صفت کیفی نیز دو صفت را در صورتی مستقل از یکدیگر گویند که توزیع یکی برحسب حالات مختلف از صفت دیگر تغییر نکند. مثلاً در یک جامعه، دو صفت جنس و سواد (گروه بندی شده به دو حالت باسواد و بی‌سواد) را وقتی مستقل از یکدیگر گویند که نسبت با سواد در مردها و زنها یکسان بوده و برابر نسبت با سواد در کل جامعه باشد. البته این یکسان بودن توزیع یک صفت نسبت به صفت دیگر مربوط به کل جامعه است و نه برای نمونه‌ای که از آن جامعه انتخاب می‌شود. روشی که در اینجا برای آزمون فرضیه مستقل بودن دو صفت بکار می‌رود عبارت خواهد بود از مقایسه فراوانی‌های مشاهده شده با فراوانی‌های نظری که براساس فرضیه مستقل بودن دو صفت، برای هر یک از خانه‌های جدول برآورد می‌گردد. اگر در این مقایسه اختلاف معنی‌داری مشاهده گردد، فرضیه مستقل بودن دو صفت مردود و در غیر این صورت گوییم نمونه انتخاب شده با فرضیه مذکور مغایرتی را نشان نمی‌دهد.

برآورد فراوانی نظری برای خانه‌های جدول به این ترتیب خواهد بود که برای هر خانه جدول، جمع فراوانی آن سطر را در جمع فراوانی آن ستون ضرب کرده و حاصل را به جمع کل مشاهدات تقسیم می‌کنیم. مثلا برای خانه مربوط به سطر iام و ستون jام این فراوانی که با e_{ij} نشان می‌دهیم برابر خواهد بود با:

$$e_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n} \qquad (۸-۲۲)$$

و این بدان معنی است که برای کلیه i ها، $n_{i.}$ فردی که در سطر i ام از ستون جمع قرار دارند، در سطر مربوط به خود توزیعی مشابه توزیع مربوط به سطر جمع داشته باشند. لازم به تذکر است که اگر جمع هر سطر در داخل سطر خود توزیعی مشابه توزیع مربوط سطر جمع داشته باشد، جمع

هر ستون نیز در داخل ستون خود توزیعی مشابه توزیع ستون جمع خواهد داشت. یعنی در بدست آوردن فراوانی‌های نظری اگر برای کلیه j ها $n_{.j}$ فردی را که در ستون j ام از سطر جمع قرار دارند در ستون مربوط به خود مشابه ستون جمع توزیع کنیم نیز به همان نتیجه خواهیم رسید.

ملاکی که برای این آزمون بکار می‌رود همان ملاک $\chi^۲$ است که از رابطه (۶-۲۲) محاسبه می‌گردد. در صورت صحیح بودن فرضیه H_0 یعنی مستقل بودن دو صفت از هم، این ملاک دارای توزیع تقریبی $\chi^۲$ با درجه آزادی :

$$df = (r-۱)\,(c-۱) \qquad (۸\text{-}۲۳)$$

می‌باشد. همانطور که در قسمت ۶-۱۱ ذکر شد، این تقریب در صورتی قابل قبول است که هیچ یک از فراوانی‌های نظری کمتر از ۱ نبوده و حداقل ۸۰ درصد آنها نیز بزرگتر از ۵ باشد.

به این ترتیب ملاک $\chi^۲$ را از رابطه زیر:

$$\chi^۲ = \sum_{i=۱}^{r}\sum_{j=۱}^{c}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^۲}{e_{ij}} \qquad (۸\text{-}۲۴)$$

محاسبه کرده و چنانچه این ملاک از $\chi^۲_{۱-\alpha}$ برای درجه آزادی (۱-c) (۱-r) که از جدول VII استخراج می‌شود، بزرگتر باشد فرضیه مستقل بودن دو صفت را مردود، و در غیر این صورت گوییم نمونه انتخاب شده با فرضیه مذکور مغایرتی را نشان نمی‌دهد.

مثال ۱: به منظور مطالعه بستگی بین دو صفت رنگ چشم و رنگ مو، نمونه‌ای به حجم n=۹۵ از افراد جامعه مورد نظر به طور تصادفی انتخاب کرده و این افراد را بر حسب حالات دو صفت مورد مطالعه، به صورت جدول ۸-۶ طبقه‌بندی می‌کنیم.

جدول ۸-۶. طبقه‌بندی ۹۵ فرد نمونه مورد مطالعه برحسب حالات دو صفت رنگ مو و رنگ چشم

رنگ چشم	رنگ مو		جمع
	روشن	تیره	
سیاه	۳۲ (۲٤/۱)	۱۲ (۱۹/۹)	٤٤
سبز و آبی	۱٤ (۱۹/۷)	۲۲ (۱٦/۳)	۳٦
غیره	٦ (۸/۲)	۹ (٦/۸)	۱۵
جمع	۵۲	٤۳	۹۵

با استفاده از رابطه (۸–۲۲) فراوانی‌های نظری به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$e_{۱۱} = \frac{۴۴ \times ۵۲}{۹۵} = ۲۴/۱$$

$$e_{۱۲} = \frac{۴۴ \times ۴۳}{۹۵} = ۱۹/۹$$

$$e_{۲۱} = \frac{۳۶ \times ۵۲}{۹۵} = ۱۹/۷$$

$$e_{۲۲} = \frac{۳۶ \times ۴۳}{۹۵} = ۱۶/۳$$

$$e_{۳۱} = \frac{۱۵ \times ۵۲}{۹۵} = ۸/۲$$

$$e_{۳۲} = \frac{۱۵ \times ۴۳}{۹۵} = ۶/۸$$

(در جدول ۸–۶ اعداد داخل پرانتز همان فراوانی‌های منتظره است).

از رابطه (۸–۲۴) داریم:

$$\chi^{۲} = \frac{(۳۲-۲۴/۱)^{۲}}{۲۴/۱} + \frac{(۱۲-۱۹/۹)^{۲}}{۱۹/۹} + \frac{(۱۴-۱۹/۷)^{۲}}{۱۹/۷}$$

$$+ \frac{(۲۲-۱۶/۳)^{۲}}{۱۶/۳} + \frac{(۶-۸/۲)^{۲}}{۸/۲} + \frac{(۹-۶/۸)^{۲}}{۶/۸}$$

$$= ۱۰/۶۷$$

و از رابطه (۸–۲۳) درجه آزادی برابر است با:

$$df = (۳-۱)\ (۲-۱) = ۲$$

اینک چنانچه احتمال اشتباه نوع اول یعنی α برابر ۰/۰۱ انتخاب شود، در این صورت با مراجعه به جدول شماره VII عدد بحرانی یعنی $\chi^{۲}_{۰/۹۹}$ (۲) برابر ۹/۲۱ خواهد بود و چون ملاک محاسبه شده (۱۰/۶۷) از عدد بحرانی (۹/۲۱) بزرگتر است، فرضیه $H_۰$ را مردود می‌شناسیم و قضاوت می‌کنیم که دو صفت رنگ چشم و رنگ مو وابسته‌اند.

مثال ۲: به منظور بررسی وجود یا عدم وجود بستگی بین نوع شوک و زنده ماندن بیمار، از

بیمارانی که به انواع شوک مبتلا می‌شوند (انواع شوک در این مثال شامل شوک ناشی از کاهش حجم خون، شوک قلبی، شوک عصبی، شوک عفونی و شوک ناشی از اختلالات غدد داخلی است) نمونه‌هایی انتخاب می‌کنیم و آنها را برحسب زنده ماندن و یا مردن در جدولی چون جدول ۸-۷ طبقه‌بندی می‌کنیم.

جدول ۸-۷. فراوانی‌های مشاهده شده و منتظره انواع شوک برحسب زنده بودن و نبودن

نوع شوک	نتیجه		جمع
	زنده	مرده	
کاهش حجم خون	۷ (۷/۸)	۸ (۷/۲)	۱۵
قلبی	۱۱ (۱۱/٤)	۱۱ (۱۰/٦)	۲۲
عصبی	۱۰ (۸/۳)	٦ (۷/۷)	۱٦
عفونی	۹ (۸/۳)	۷ (۷/۷)	۱٦
غدد داخلی	۳ (٤/۲)	۵ (۳/۸)	۸
جمع	٤۰	۳۷	۷۷

در این مثال نیز مانند مثال ۱ فراوانی‌های نظری با استفاده از رابطه (۸-۲۲) به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$e_{۱۱} = \frac{۱۵ \times ٤۰}{۷۷} = ۷/۸$$

$$e_{۱۲} = \frac{۱۵ \times ۳۷}{۷۷} = ۷/۲$$

$$e_{۲۱} = \frac{۲۲ \times ٤۰}{۷۷} = ۱۱/٤$$

$$e_{۲۲} = \frac{۲۲ \times ۳۷}{۷۷} = ۱۰/٦$$

$$e_{۳۱} = \frac{۱۶ \times ۴۰}{۷۷} = ۸/۳$$

$$e_{۳۲} = \frac{۱۶ \times ۳۷}{۷۷} = ۷/۷$$

$$e_{۴۱} = \frac{۱۶ \times ۴۰}{۷۷} = ۸/۳$$

$$e_{۴۲} = \frac{۱۶ \times ۳۷}{۷۷} = ۷/۷$$

$$e_{۵۱} = \frac{۸ \times ۴۰}{۷۷} = ۴/۲$$

$$e_{۵۲} = \frac{۸ \times ۳۷}{۷۷} = ۳/۸$$

و از رابطه (۸-۲۴) مقدار ملاک $\chi^۲$ برابر است با:

$$\chi^۲ = \frac{(۷-۷/۸)^۲}{۷/۸} + \ldots + \frac{(۵-۳/۸)^۲}{۳/۸} = ۱/۷۷$$

از رابطه (۸-۲۳) درجه آزادی برابر است با :

$$df = (۲-۱)\,(۵-۱) = ۴$$

اینک چنانچه احتمال اشتباه نوع اول یعنی α برابر ۰/۰۵ انتخاب شود با مراجعه به جدول شماره VII عدد بحرانی یعنی $\chi^۲_{۰/۹۵}(۴)$ برابر ۹/۴۹ خواهد شد و چون ملاک محاسبه شده (۱/۷۷) از عدد بحرانی (۹/۴۹) کوچکتر است، فرضیه $H_۰$ یعنی فرضیه عدم بستگی بین دو صفت زنده بودن یا نبودن و انواع شوک مردود شناخته نمی‌شود. به عبارت دیگر نمی‌توان اظهار نظر کرد که احتمال مرگ برای انواع شوک مختلف است.

همانطور که در قسمت ۶-۱۱ آمده است برای استفاده از ملاک $\chi^۲$ لازم است فواصل گروه‌ها آنچنان انتخاب شود که هیچ یک از فراوانیهای نظری کمتر از ۱ نباشد و حداقل ۸۰ درصد آنها نیز بزرگتر از ۵ باشد. در صورتیکه در جدول توافق $r \times c$ شرط مذکور برقرار نباشد می‌توان دو یا چند حالت مجاور را در سطر یا ستون، در یکدیگر ادغام نمود تا شرط مذکور برقرار گردد ولی در جدول توافق ۲ × ۲ این عمل امکان‌پذیر نیست (زیرا با این عمل طبقه‌بندی اندازه یا حالت صفت

منتفی می‌گردد). در این گونه موارد از آزمون دیگری به نام آزمون دقیق فیشر[1] استفاده می‌شود که دستور آن در زیر آمده است.

آزمون دقیق فیشر: با توجه به توضیحات بالا هنگامی استفاده از این آزمون توصیه می‌شود که در جدول توافق ۲×۲ حداقل یکی از فراوانیهای منتظره کمتر از ۵ باشد. در این روش حاشیه‌ها را ثابت فرض کرده و در نتیجه می‌توان حالتهای مختلف ممکن را براساس توزیع فوق هندسی (رابطه ۳-۱۹) محاسبه کرد. در آزمون یک دامنه جمع احتمال‌ها برای حالتی که در جهت رد فرضیه H_0 است مقدار p را تشکیل می‌دهد و در آزمون دو دامنه روشهای مختلفی برای محاسبه مقدار p بکار می رود که در ساده ترین شکل دو برابر p محاسبه شده مقدار p را تشکیل می‌دهد. اگر مقدار p بدست آمده از α مورد نظر کوچکتر باشد فرضیه H_0 را رد کرده و قضاوت می‌کنیم که بین دوصفت مورد بررسی همبستگی وجود دارد. در غیر این صورت فرضیه H_0 رد نمی‌شود.

مثال: در انستیتو پاستور ایران ۱۷ نفر را که گرگ هاری از ناحیه سر و گردن گاز گرفته بود به دو گروه ۵ نفری و ۱۲ نفری تقسیم کردند گروه اول را تنها با واکسن استاندارد پاستور، و گروه دوم را علاوه بر واکسن با یک یا چند دوز سرم ضد هاری نیز معالجه کردند که خلاصه نتیجه آن در جدول ۸-۹ آمده است. آیا اضافه کردن سرم در مرگ و میر بیماری موثر بوده است؟

جدول ۸-۹.

طریقه درمان	نتیجه درمان		جمع
	مرده	زنده	
واکسن	۳ (۱/۲)	۲ (۳/۸)	۵
واکسن + سرم	۱ (۲/۸)	۱۱ (۹/۲)	۱۲
جمع	٤	۱۳	۱۷

در مثال مورد بحث چون فراوانی منتظره (اعداد داخل پرانتز) پاره‌ای از خانه‌های جدول از ۵ کوچکتر است، بنابراین از آزمون دقیق فیشر استفاده می‌شود. در آزمون یک دامنه موثر بودن سرم هنگامی ثابت می‌شود که نسبت فوت برای گروهی که از سرم استفاده کرده ($\frac{1}{12}$) به طور

1. Fisher's exact test

معنی‌داری کمتر از گروهی باشد که از سرم استفاده نکرده است $(\frac{۳}{۵})$. به عبارت دیگر مقدار p محاسبه شده، برای آن کمتر از α یعنی ۰/۰۵ باشد. در این مثال، علاوه بر حالت مندرج در جدول یعنی مشاهده یک فوت در گروه استفاده کرده از سرم تنها حالتی که با ثابت در نظر گرفتن حاشیه‌ها می‌تواند اختلافی در جهت رد $H_۰$ نشان دهد این است که تعداد فوت برای گروهی که از سرم استفاده کرده‌اند برابر صفر باشد. حال احتمال یک بودن و صفر بودن را برای خانه مورد نظر (دریافت سرم و رخداد فوت) با استفاده از توزیع فوق هندسی به شرح زیر محاسبه می‌کنیم. اگر خانه مورد نظر را با $n_{۲۱}$ (به مفهوم تعداد مشاهده شده در ردیف دوم و ستون اول) نشان دهیم خواهیم داشت:

$$P(۰ \leq n_{۲۱} \leq ۱) = \frac{\binom{۵}{۳}\binom{۱۲}{۱}}{\binom{۱۷}{۴}} + \frac{\binom{۵}{۴}\binom{۱۲}{۰}}{\binom{۱۷}{۴}}$$

$$= \frac{۱۰ \times ۱۲}{۲۳۸۰} + \frac{۵ \times ۱}{۲۳۸۰} = ۰/۰۵۰۴ + ۰/۰۰۲۱ = ۰/۰۵۲۵$$

اینک چنانچه احتمال اشتباه نوع اول یعنی α برابر ۰/۰۵ انتخاب شود چون ۲ برابر p بدست آمده (۰/۱۰۵۰ = ۰/۰۵۲۵ × ۲) از α (۰/۰۵) بزرگتر است، فرضیه $H_۰$ رد نمی‌شود. یعنی نمی‌توان گفت که اضافه کردن سرم روی میزان مرگ بیماری موثر بوده است.

اگر در این آزمون تنها کاهش مرگ بدلیل افزایش سرم مورد نظر باشد (آزمون یک دامنه) لازم است خود مقدار p (۰/۰۵۲۵) را با α (۰/۰۵) مقایسه کرد، البته بازهم فرضیه $H_۰$ رد نخواهد شد.

تمرین

۱. در جدول زیر X و Y به ترتیب معرف سن و تعداد اولاد نمونه‌ای از مادران (در سن باروری) است که از جامعه به طور تصادفی انتخاب شده‌اند.

X	Y	X	Y	X	Y
۳٤	۲	۱۷	۱	۲٦	۲
۲۸	۲	٤۸	٤	۳٤	۲
۱۹	۱	۳۸	۳	۱٦	۱
٤۱	۳	۳۰	۲	۳۰	۲
۲۱	۱	۲٦	۲	۳۵	۲
۲۰	۲	۱۹	۱	۳۸	۳
۲۱	۱	۳٦	۳	۲۱	۲
۳۹	۲	٤۵	۳	۲۵	۲
۳۷	۳	۱۸	۱	۲۸	۲
۲۳	۲	٤۰	۲	٤۵	۳

الف: نمودار پراکنش این اطلاعات را رسم کنید.

ب: مقادیر $\overline{Y}, \overline{X}$ و r را محاسبه کنید.

ج: معادله خط رگرسیون Y به ازاء X را محاسبه و خط را در همان دستگاهی که نمودار پراکنش مشخص شده است رسم کنید.

د: مستقل بودن دو صفت را یک بار براساس فرضیه $\rho=۰$ و بار دیگر براساس فرضیه B=۰ آزمون کنید.

هـ : میانگین تعداد اولاد را برای سن ۳۵ سالگی برآورد کنید و حدود اعتماد این میانگین را

برای ۹۵ درصد اعتماد بدست آوردید.

و: حدود اعتماد ۹۵ درصد را برای فردی که از این جامعه به طور تصادفی انتخاب می‌شود و سن او ۳۵ سال است حساب کنید.

۲. در جدول زیر X معرف اندازه هموگلوبین خون برحسب درصد اندازه نرمال و Y معرف تعداد گلبولهای قرمز در یک میلیمتر مکعب خون بر حسب میلیون است.

X	Y	X	Y	X	Y
۹۳	٤/٥	۷۰	۳/۹	۹۳	٤/۹
۹٦	٤/۳	۹۲	٤/۹	۱۱۸	٥/٦
۱۰۸	٥/۱	۹٤	٤/٦	۹۸	٤/۳
۸٦	۳/٦	۱۱۲	٥/۰	٦۲	٤/۰
۹۲	٤/٥	۱۰۲	٤/٤	۹۸	٥/۰
۸۰	۳/٤	۹۲	٤/٥	۱۱۰	٥/۱
۱۱۷	٥/۷	۸۰	٤/۳	٦۱	۳/۱
۹٥	٥/۲	۹۰	٤/٤	۹٦	٤/٤
۹٤	٤/٥	۱۱۱	٥/۲	۱۰۱	٤/٥
۹٦	٤/٥	۹۸	٤/۲	۷۹	٤/۲
۱۱۱	٥/۷	۹٦	٥/۲	۱۰۹	٥/۰
۱۰٤	٥/۰	۹۹	٥/۰	۱۰۱	٤/٦
۸٤	٤/۸	۱۰۰	٤/۸	۱۰۰	٥/۰
۸۰	٤/۳	۹٥	٤/۲	۸۰	٤/۰

الف: دیاگرام پراکنش این اطلاعات را رسم کنید.

ب: $\bar{Y}, \bar{X}$ و r را برای اطلاعات فوق محاسبه و اختلاف ضریب همبستگی را با صفر آزمون کنید.

ج: معادله رگرسیون Y به ازاء X و همچنین حدود اعتماد این معادله را برای ۹۵ درصد محاسبه کنید و آنگاه حد بالا، حد پایین و خط مرکزی را در همان دستگاه نمودار پراکنش رسم کنید.

۳. اطلاعات زیر مربوط به سن بر حسب سال (X) ، فشار خون سیستولیک برحسب سانتیمتر جیوه (Y) و فشار خون دیاستولیک بر حسب سانتیمتر جیوه (Z) در یک نمونه ۱۱۲۳ نفری از جامعه مردان ۱۵ سال به بالای ساکن شهرستان رودسر است.

$\Sigma X=41690$	$\Sigma Y=14185$	$\Sigma Z=8036$
$\Sigma X^2=1822100$	$\Sigma Y^2=184101$	$\Sigma Z^2=58937$
$\Sigma XY=538750$	$\Sigma XZ=303240$	$\Sigma YZ=102698$

الف: ضریب همبستگی متغیرهای فوق را دو به دو حساب و با صفر آزمون کنید.
ب: معادله رگرسیون Y به ازاء X و Z به ازاء X و Y به ازاء Z را محاسبه کنید.
ج: حدود اعتماد (۹۵ درصد) میانگین فشار خون سیستولیک و دیاستولیک را برای مردان ۵۰ ساله بدست آورید.

٤. میزان بارندگی سالانه و محصول پنبه بدست آمده در یک منطقه به صورت جدول زیر است:

محصول پنبه (کیلوگرم در یک هکتار) Y	میزان بارندگی (سانتیمتر) X
۱۰۳۷	۱۸/۱۲
۳۸۰	۱٦۳/٥٤
٤۱٦	۱۲۰/۳۸
٤۲۷	۱۱٦/۹۲
٦۱۹	۲۲/٦۸
۳۸۸	۱۲۹/۸٦
۳۲۱	۱۱۲/٤٦

الف: فکر می‌کنید که این اطلاعات چگونه بدست آمده است؟ آیا فکر می‌کنید که نمونه به طور تصادفی از توزیع توأم دو صفت انتخاب شده، یا از مقدار محصول برای مقادیر ثابت باران بدست آمده است؟
ب: خط رگرسیون مقدار محصول پنبه را برحسب میزان باران برآورد کنید.
ج: دیاگرام پراکنش و خط رگرسیون را رسم کنید.
د: حدود اعتماد ۹۵ درصد را برای میانگین محصول پنبه به ازاء باران سالانه ۱۲۵ سانتیمتر بدست آورید.
هـ: حدود اعتماد ۹۵ درصد را برای محصول پنبه به ازاء باران سالانه ۷۵ سانتیمتر بدست آورید.

و: صفر بودن ضریب همبستگی (ρ) را آزمون کنید.
ز: حدود اعتماد ۹۵ درصد را برای ρ بدست آوردید.

۵. عقیده بر این است که میانگین مقدار محصول گندم با مقدار یک نوع کود شیمیایی نیتروژنی برای زمین، به ازاء مقادیر به کار گرفته شده از این کود شیمیایی، تقریبا دارای رابطه خطی مستقیم است. در ۸۲ قطعه زمین، هر یک به مساحت یک هکتار مقادیر مختلف از این کود شیمیایی استفاده شده و مقدار محصول به صورت جدول زیر است:

مقدار محصول (Y)	مقدار کود (X)					
	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
۳۱-۳۵				۲	۶	۳
۲۶-۳۰			۵	۱۲	۷	۲
۲۱-۲۵		۴	۸	۸	۶	
۱۶-۲۰		۲	۷		۱	
۱۱-۱۵	۱	۳				
۶-۱۰	۳	۱				
۱-۵	۱					
جمع	۵	۱۰	۲۰	۲۲	۲۰	۵

الف: مقدار $\overline{X}, \overline{Y}$ ، s_x ، s_y , b و $s_{y.x}$ را محاسبه کنید.
ب: معادله خط رگرسیون برآورد شده برای محصول برحسب مقدار کود را بنویسید.

۶. اطلاعات جدول زیر مربوط به تعداد فرزند و در آمد ماهیانه خانواده بر حسب تومان در ۲۵۷ خانوار از یک منطقه است. ضمن بیان مفروضات لازم، درباره بستگی درآمد و تعداد فرزند تحلیل مناسب بیان نمایید.

درآمد	تعداد فرزند			
	۰	۱	۲	۲+
کمتر از ۱۰۰۰	۱۵	۲۷	۵۰	۴۳
۳۰۰۰ - ۱۰۰۰	۲۵	۳۷	۱۲	۸
+ ۳۰۰۰	۸	۱۳	۹	۱۰

۷. به منظور بررسی تاثیر نوعی ویتامین در افزایش انرژی، در تجربه‌ای به ۱۰۰ نفر (گروه آزمایش) ویتامین مورد نظر تجویز و به ۱۰۰ نفر دیگر (گروه شاهد) شبه دارو (Placebo) تجویز می‌گردد. اگر جدول زیر گویای نتیجه تجربه فوق باشد، فرضیه مورد بحث را آزمون و نتیجه‌گیری کنید.

گروه	نتیجه آزمایش		
	افزایش انرژی	کاهش انرژی	بدون تغییر
شاهد	۲۰	۱۰	۷۰
آزمایش	۳۶	۸	۵۶

۸ . اطلاعات جدول زیر را که مربوط به توزیع یک نمونه ۱۳۷ نفری از جامعه زنان منطقه‌ای بر حسب دفعات حاملگی و تمایل آنها به تعداد فرزندان اضافی است، در نظر بگیرید. راجع به همبستگی این دو صفت بحث کنید.

فرزند خواسته اضافی	تعداد حاملگی		
	۰	۱–۳	۴+
۰	٪۵۰	٪۵۹/۷	٪۸۸/۷
۱–۳	٪۵۰	٪۴۰/۳	٪۱۱/۳
جمع تعداد	۸	۶۷	۶۲

۹. از ۵ بیماری که با داروی A درمان شده‌اند ۴ بیمار و از ۵ بیماری که با داروی B درمان شده‌اند ۲ بیمار بهبودی حاصل می‌کنند. درباره اختلاف این دو دارو در درمان بیماری مورد نظر بحث کنید.

۱۰. براساس اطلاعات ارائه شده در تمرین ۹ فصل هفتم ضریب همبستگی اسپیرمن بین فشار خون و سن را محاسبه نمائید.

فصل نهم
شاخص‌های رخداد بیماری

۹-۱. تعاریف

در اپیدمیولوژی از سه کسر که معرف اندازه شیوع و بروز یک رخداد که معمولاً بیماری است، استفاده فراوان می‌شود. این سه کسر که همراه با قید زمان می‌باشند عبارتند از:

الف: شیوع لحظه‌ای:[1] این شاخص از تقسیم موارد بیماری در لحظهٔ معینی از زمان بر جمعیت در معرض آن بیماری حاصل می‌شود.

ب: بروز تجمعی (خطر)[2] در فاصله t_0 و t_1: این شاخص از تقسیم موارد جدید بیماری در این فاصله بر جمعیت در معرض آن بیماری در لحظه t_0 حاصل می‌شود به شرط آنکه هیچ فردی در فاصله t_0 تا t_1 به دلیل دیگری به جز بیماری مورد نظر از مطالعه خارج نشده باشد. در صورت خارج شدن تعداد معدودی از افراد قبل از رخداد بیماری، با تقریب به ازای هر فرد خارج شده نیم واحد از مخرج کسر کم می‌شود.

ج: میزان بروز[3]: این شاخص گویای متوسط رخداد موارد جدید بیماری به ازای واحد زمان در معرض است. در محاسبه این میزان به دلیل یکسان نبودن زمان مواجهه برای کلیه افراد، از شخص ـ زمان مواجهه استفاده می‌شود. به عبارت دیگر این شاخص متوسط رخداد به ازای شخص ـ زمان را در فاصله مورد مطالعه نشان می‌دهد اگر فاصله مورد مطالعه به سمت صفر میل کند، این شاخص معرف تابع مخاطره[4] برای لحظه مورد نظر خواهد بود

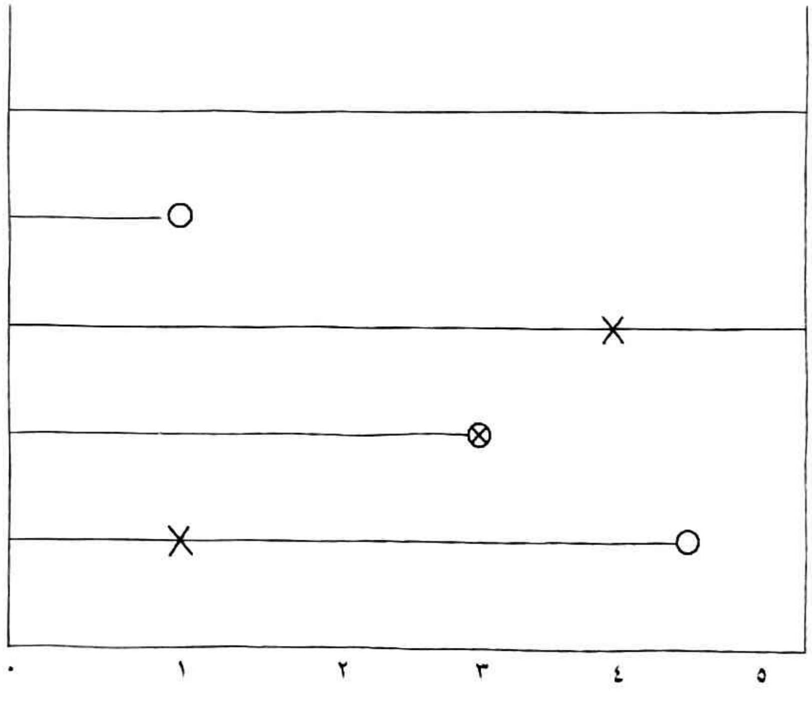
---

1. Point prevalenee
2. Cumulative incidence (Risk)
3. Incidence rate
4. Hazard function

که آن را میزان بروز لحظه‌ای[1] نیز می‌نامند.

$$\text{میزان بروز}\ (\hat{\lambda}) = \frac{\text{تعداد رخداد}\ (d)}{\text{جمع شخص ـ زمان درمعرض}\ (T)} \qquad (۱-۹)$$

شکل ۹-۱ وضعیت بیمار شدن و مرگ ۵ نفر از یک بیماری را در فاصله t_0 و t_5 نشان می‌دهد. توضیحات و محاسبات زیر شکل مفاهیم اندازه‌های سه گانه فوق را به خوبی روشن می‌نماید.



× ابتلا به بیماری　　- زنده بودن　　مرگ ○

شکل ۹-۱. نمایش وضعیت بیمار شدن و مرگ ۵ نفر از یک بیماری در دو فاصله زمانی t=۰ و t=۵

- شیوع لحظه‌ای در لحظه t = ۰ برابر $\frac{0}{5}$ و در لحظه t=۵ برابر $\frac{1}{2}$ است به فرض اینکه نفر سوم در لحظه t=۵ هنوز بیمار باشد.
- بروز تجمعی از لحظه t = ۰ تا t=۵ برابر با $\frac{3}{4/5}$ است.

1. Instantaneous incidence rate

- میزان بروز از لحظه t = ۰ تا t=۵ برابر است با

$$\frac{۳}{۵+۱+٤+۳+۱}=\frac{۳}{۱٤}=۰/۲۱$$

در صورتی که شخصی که بیمار شده مجدداً شانس بیمار شدن نداشته باشد و برابر است با

$$\frac{۳}{۵+۱+۵+۳+٤/۵}=\frac{۳}{۱۸/۵}=۰/۱٦$$

در صورتی که شخصی که بیمار شده مجدداً شانس بیمار شدن داشته باشد. برای روشن شدن بیشتر موضوع به ذکر یک مثال عملی می‌پردازیم. فرض کنید جمعیت روستایی در ابتدای سال برابر ٤۰۰ نفر است و در طول سال وقایع حیاتی زیر در روستا رخ می‌دهد:

جدول ۹-۱. تولد، مرگ و نفر سال در یک جمعیت روستایی در طی یکسال

	وقایع و تاریخ	نفر سال زنده بودن در طی سال
۱	تولد ۱/۱۵	$\frac{۳۵۰}{۳٦۵}=۰/۹٦$
۲	تولد ۲/۱٦ مرگ ۳/۱٦	$\frac{۳۱}{۳٦۵}=۰/۰۸$
۳	تولد ٦/۱	$\frac{۲۱۰}{۳٦۵}=۰/۵۸$
٤	تولد ۷/۱۵	$\frac{۱٦٤}{۳٦۵}=۰/٤۵$
۵	تولد ۷/۲٦ مرگ ۸/٦	$\frac{۱۰}{۳٦۵}=۰/۰۳$
٦	مرگ ۱۲/۱۵	$\frac{۳۵۱}{۳٦۵}=۰/۹٦$
	۳۹۹ نفر از اول تا آخر سال زنده بوده‌اند	۳۹۹
		جمع نفر سال= ٤۰۲/۰٦

حال میزان بروز تولد خام در سال مطالعه برابر است با :

$$\frac{۵\times۱۰۰۰}{٤۰۲/۰٦}=۱۲/٤٤ \text{ نفرسال در هزار}$$

و میزان مرگ برابر است با :

$$\frac{۳\times۱۰۰۰}{٤۰۲/۰٦}=۷/٤٦ \text{ نفرسال در هزار}$$

محاسبه چنین جدولی با جمعیت‌های واقعی مستلزم وقت زیادی بوده و عملی نمی‌باشد. بخصوص اینکه در عمل اغلب، ثبت وقایع مرگ و تولد به هنگام انجام نمی‌گیرد. برای رفع این اشکال و برآورد تعداد نفر سال، تعیین تعداد جمعیت در وسط سال یعنی زمانی که نصف تغییرات جمعیتی صورت گرفته و می‌توان فرض نمود تعادلی در جمعیت برقرار می‌باشد، انجام می‌گیرد. مطالعات مختلف نشان داده است که توزیع این وقایع در ماه‌های مختلف سال یکسان نبوده و تعداد آنها در دو نیم سال کاملاً مساوی نمی‌باشد. با وجود این، جمعیت وسط سال تقریب قابل قبولی از تعداد نفر سال بوده و مورد استفاده عام برای محاسبه میزان‌های مختلف بهداشتی و حیاتی قرار گرفته است.

علاوه بر سه شاخص فوق در مطالعات اپیدمیولوژی معمولاً از شاخص دیگری به نام برتری[۱] یا شانس نیز برای نشان دادن موفقیت یا رخداد استفاده می‌شود که مقدار این شاخص عبارت است از نسبت رخداد (p) به نسبت عدم رخداد (p– ۱)،

$$odds = \frac{p}{۱-p}$$

۹-۲. حدود اعتماد میزان

در فصل سوم گفته شد که توزیع پواسن توزیع بروز تعداد حادثه را در دوره‌ای از زمان بیان می‌دارد. بدین ترتیب می‌توان واریانس میزان را با توجه به تبعیت مقادیر d (تعداد حوادث رخ داده در دوره‌ای از زمان) از توزیع پواسن به ترتیب زیر محاسبه نمود:

$$\text{(میزان)}\ \hat{\lambda} = \frac{d\ \text{(تعداد حوادث)}}{T\ \text{(شخص ـ زمان)}}$$

با توجه به مطالب عنوان شده در فصل دوم درباره واریانس یک ترکیب خطی خواهیم داشت:

$$Var(\hat{\lambda}) = \frac{۱}{T^{۲}} Var(d)$$

و با استفاده از مساوی بودن میانگین و واریانس در توزیع پواسن خواهیم داشت:

$$Var(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda T}{T^{۲}} = \frac{\lambda}{T}$$

1. Odds

بنابراین خطای معیار میزان برابر است با :

$$SE(\hat{\lambda}) = \sqrt{\frac{\lambda}{T}}$$

از رابطه فوق می‌توان حدود اعتماد را برای λ محاسبه کرد ولی مناسب‌تر است برای این کار از تغییر متغیر لگاریتمی استفاده شود.

بر پایه روشی به نام دلتا[1] واریانس تقریبی لگاریتم X برابر است با $V(LnX) \simeq \frac{V(X)}{(EX)^2}$ و در نتیجه خطای معیار تقریبی لگاریتم $\hat{\lambda}$ برابر است با :

$$SE(Ln\hat{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{d}}$$

و در نتیجه

$\hat{\lambda} Ln \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ SE(\hat{\lambda} Ln)$ = حدود اعتماد $(1-\alpha)$ برای لگاریتم λ

و چنانچه آنتی لگاریتم عبارت فوق را محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$\frac{\hat{\lambda}}{e^{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}SE(Ln\hat{\lambda})}}$ و $\hat{\lambda} \times e^{z_{1-\frac{\alpha}{2}}SE(Ln\hat{\lambda})}$ = حدود اعتماد $(1-\alpha)$ برای λ

معمولا کمیت $e^{z_{1-\frac{\alpha}{2}}SE(Ln\hat{\lambda})}$ عامل خطا[2] خوانده می‌شود وآن را با EF نشان می‌دهیم. بنابراین می‌توان حدود اعتماد $(1-\alpha)$ برای میزان را به صورت زیر نشان داد:

$\frac{\hat{\lambda}}{EF}$ و $\hat{\lambda} \times EF$ = حدود اعتماد $(1-\alpha)$ برای λ

در مثال فوق (جدول ۹-۱) عامل خطا برای میزان تولد و مرگ به صورت زیر بدست می‌آید:

$e^{1/96/\sqrt{5}} = 2/40$ = عامل خطا برای میزان تولد

$e^{1/96/\sqrt{3}} = 3/10$ = عامل خطا برای میزان مرگ

و بنابراین حدود اعتماد ۹۵ درصد برای میزان تولد و مرگ به ترتیب برابر است با :

$\frac{12/44}{2/40}$ و $12/44 \times 2/40$ = حدود اعتماد ۹۵ درصد برای میزان تولد

---

۱. برای اطلاع از روش دلتا به کتب آمار از قبیل مرجع شماره ۱۲ این کتاب مراجعه نمایید.

2. Error factor

$= (۵/۱۸$ و $۲۹/۸۹)$ =

$۷/۴۶ \times ۳/۱۰$ و $\frac{۷/۴۶}{۳/۱۰}$ = حدود اعتماد ۹۵ درصد برای میزان مرگ کلی

$= (۲/۴۱$ و $۲۳/۱۳)$ =

۹-۳. شاخص‌های تطبیق شده

اگر بخواهیم برای مثال دو جامعه را از نظر میزان مرگ با هم مقایسه کنیم استفاده از میزان مرگ کلی بدون توجه به توزیع سنی و جنسی دو جامعه ممکن است گمراه کننده باشد. برای مثال چنانچه افراد مسن یکی از جامعه‌ها از دیگری بیشتر باشد، بدون آنکه وضع بهداشتی بدتری داشته باشد میزان مرگ بیشتری خواهد داشت. برای رفع این اشکال می‌توان از میزان‌های اختصاصی سنی و جنسی استفاده کرد ولی با بکار بردن میزان‌های اختصاصی فقط می‌توان گروه‌های سنی و جنسی را با هم مقایسه کرد و مقایسه دو جامعه در کل بازهم مقدور نخواهد بود. برای نیل به هدف فوق می‌توان از روش تطبیق میزان‌ها استفاده نمود. این تطبیق می‌تواند براساس هر متغیری باشد که معمولاً از دو عامل سن و جنس استفاده می‌کنیم. تطبیق میزان‌ها با دو روش مستقیم[1] و غیرمستقیم[2] انجام می‌شود که در قسمتهای زیر به آنها پرداخته می‌شود.

۹-۳-۱. تطبیق به روش مستقیم

اساس این روش عبارت است از انتخاب یک جمعیت معیار[3] (P_s) و محاسبه میزان مثلاً مرگ این جمعیت با بکار بردن میزان‌های اختصاصی مثلاً سنی هر یک از دو جامعه مورد نظر ($R_{۱i}$ و $R_{۲i}$). در هر کدام از گروه‌های سنی (P_{si}) تعداد مرگهای منتظره گروه‌های سنی دو جامعه ($D_{۱i}$ و $D_{۲i}$) تعیین می‌گردد:

$$R_{۱i} \times P_{si} \div ۱۰۰۰ = D_{۱i}$$

$$R_{۲i} \times P_{si} \div ۱۰۰۰ = D_{۲i}$$

در این صورت میزان‌های تطبیق شده برابر خواهند شد با جمع D_i ها تقسیم بر جمع جمعیت معیار، ضرب در هزار.

$$R_{s۱} = \frac{\sum D_{۱i}}{P_s} \times ۱۰۰۰$$

$$R_{s۲} = \frac{\sum D_{۲i}}{P_s} \times ۱۰۰۰$$

1. Direct standardizaion
2. Indirect standardization
3. Standard population

به عنوان جمعیت معیار P_s می‌توان هر جمعیتی که گروه‌بندی سنی آن مشابه گروه بندی سنی دو جمعیت مورد نظر P_1 و P_2 باشد انتخاب نمود. در مثالی که در جدول ۹-۲ ذکر شده جمعیت ایران طبق سرشماری ۱۳۴۵ به عنوان جمعیت معیار انتخاب شده است. میزانهای اختصاصی سنی شهر و روستا در هر گروه سنی را، در جمعیت معیار همان گروه سنی ضرب نموده و تعداد مرگهای منتظره برای هر گروه سنی در شهر و روستا محاسبه شده است. مثلا در گروه سنی ۱۹-۱۵ تعداد مرگهای منتظره برابر خواهد بود با:

$$\text{در روستا}\quad ۳۶۸۳ = \frac{۱/۷۳ \times ۲۱۲۹۰۳۶}{۱۰۰۰}$$

$$\text{در شهر}\quad ۱۳۸۴ = \frac{۰/۶۵ \times ۲۱۲۹۰۳۶}{۱۰۰۰}$$

جدول ۹-۲. محاسبه میزان‌های تطبیق شده شهر و روستای کشور ایران در سال ۱۳۵۲

گروه سنی	میزان مرگ اختصاصی سنی درهزار نفر		جمعیت معیار سرشماری ۱۳۴۵ ایران	مرگهای منتظره	
	R_{1i} روستا (۱)	R_{2i} شهر (۲)	P_{si} (۳)	D_{1i} (روستا) (۱×۳)	D_{2i} شهر (۲×۳)
۴-۰	۴۰/۰۶	۱۶/۲۵	۴۴۳۶۹۲۱	۱۷۷۷۴۳	۷۲۱۰۰
۹-۵	۱/۸۳	۰/۹۳	۴۱۰۶۱۵۸	۷۵۱۴	۳۸۱۸
۱۴-۱۰	۰/۷۶	۰/۳۱	۳۰۱۷۲۵۰	۲۲۹۳	۹۳۵
۱۹-۱۵	۱/۷۳	۰/۶۵	۲۱۲۹۰۳۶	۳۶۸۳	۱۳۸۴
۲۴-۲۰	۲/۰۲	۱/۲۶	۱۶۸۲۱۶۱	۳۳۹۸	۲۱۲۰
۲۹-۲۵	۱/۹۱	۰/۹۸	۱۶۴۹۶۷۲	۳۱۵۱	۱۶۱۷
۳۴-۳۰	۲/۵۵	۱/۶۰	۱۶۶۸۰۴۶	۴۲۵۴	۲۶۶۹
۳۹-۳۵	۲/۸۷	۲/۱۵	۱۴۱۸۲۳۹	۴۰۷۰	۳۰۴۹
۴۴-۴۰	۳/۵۴	۲/۵۱	۱۳۲۱۰۵۰	۴۶۷۷	۳۳۱۶
۴۹-۴۵	۳/۴۰	۴/۷۳	۸۴۳۶۰۸	۲۸۶۸	۳۹۹۰
۵۴-۵۰	۱۲/۲۷	۱۰/۲۱	۷۴۰۸۳۹	۹۰۹۰	۷۵۶۴
۵۹-۵۵	۷/۱۲	۱۴/۶۴	۴۲۷۹۰۱	۳۰۴۷	۶۲۶۵
۶۴-۶۰	۱۵/۸۱	۲۴/۶۴	۶۶۹۹۳۷	۱۰۵۹۲	۱۶۵۰۷
۶۵ +	۲۶/93	۹۱/۵۰	۹۶۸۱۰۵	۲۶۰۷۱	۸۸۵۸۱
کل	۱۰/۰۴	۶/۰۶	۲۵۰۷۸۹۲۳	۲۶۲۴۵۱	۲۱۱۹۱۶

براساس محاسبات جدول ۹-۲ میزان مرگ تطبیق شده برای روستا برابر است با :

$$R_{s1} = \frac{۲۶۲۴۵۱}{۲۵۰۷۸۹۲۳} \times ۱۰۰۰ = ۱۰/۴۷ \quad \text{در هزار}$$

و برای شهر برابر است با :

$$R_{s۲} = \frac{۲۱۱۹۱۶}{۲۵۰۷۸۹۲۳} \times ۱۰۰۰ = ۸/۴۵ \text{ در هزار}$$

از جدول ۹-۲ و نتیجه محاسبات، مشاهده می‌شود که میزان مرگ خام روستاها ۱/٦٦ برابر شهرها بوده ($۱/٦٦ = \frac{۱۰/۰٤}{٦/۰٦}$) ، در صورتیکه پس از تطبیق و از بین بردن اختلاف ناشی از توزیع سنی این نسبت به $۱/۲٤ = \frac{۱۰/٤۷}{۸/٤۵}$ کاهش یافته است.

در محاسبه حدود اعتماد برای هر یک از R_s ها لازم است تعداد فوت مشاهده شده در هر زیر گروه را نیز داشته باشیم که در این صورت با روشی مشابه به آنچه در قسمت ۹-۲ برای حدود اعتماد میزان گفته شد می‌توان آن را محاسبه کرد. برای ارائه جزئیات و محاسبه این حدود به سایر کتب آمار از جمله مرجع شماره ۱۲ مراجعه شود.

روش تطبیق سنی یا هر متغیر دیگر جمعیتی از قبیل جنس، سواد، ترتیب تولد و غیره، گذشته از تعیین و مقایسه میزان مرگ تطبیق شده، در بررسی‌های آماری و همه‌گیری شناسی بسیار مورد استفاده می‌باشد و در اغلب موارد به عنوان جمعیت معیار مجموع دو جمعیت مورد مقایسه را بکار می‌برند.

$$P_s = P_۱ + P_۲$$

مثال: یک گروه دندانپزشکی، نمونه‌ای از دانش آموزان پسر و دختر دبستان‌های منطقه‌ای از شهر تهران را از نظر تعداد دندانهای پوسیده مورد مطالعه قرار می‌دهد. جدول ۹-۳ توزیع درصد دانش آموزان برحسب سن و همچنین میانگین تعداد دندانهای پوسیده هرگروه سنی را نشان می‌دهد.

جدول ۹-۳. میانگین تعداد دندانهای پوسیده دانش آموزان برحسب سن و جنس

سن	جنس					
	پسر			دختر		
	تعداد	درصد	میانگین تعداد دندانهای پوسیده	تعداد	درصد	میانگین تعداد دندانهای پوسیده
کمتر از ۸	۱۲٦	۱۵/٦۳	٦/۹۲	۱٤۳	۲۰/۱۷	٦/۷۱
۸	۹۲	۱۱/٤۲	۷/۵٤	۱۱۰	۱۵/۵۱	٦/۱۱
۹	۱۰٦	۱۳/۱۵	۵/۹۸	۱۰٤	۱٤/٦۷	۵/۷۲
۱۰	۱۲۰	۱٤/۸۹	۵/٤۰	۹٤	۱۳/۲٦	٤/٤۷
۱۱	۱۳۷	۱۷/۰۰	۳/۵۰	۱۰۳	۱٤/۵۳	۳/۱۳
۱۲	۱۱۹	۱٤/۷٦	۲/۰٦	۸۸	۱۲/٤۱	۱/٦۸
+۱۳	۱۰٦	۱۳/۱۵	۰/٦۵	٦۷	۹/٤۵	۰/۳۷
کل	۸۰٦	۱۰۰/۰۰	٤/۵۲	۷۰۹	۱۰۰/۰۰	٤/٤۳

از این جدول نتیجه گرفته می‌شود که تعداد دندان های پوسیده در پسران و دختران تقریباً برابر و اختلاف قابل ملاحظه‌ای را نشان نمی‌دهند. ولی نظر به اینکه توزیع سنی دانش آموزان پسر و

دختر متفاوت است و نیز رابطه بین سن دانش آموزان و میانگین تعداد دندانهای پوسیده مشاهده می‌گردد، برای قضاوت صحیح درباره این اختلاف بهتر است از روش تطبیق سنی که در جدول ۹-۴ آمده است، استفاده شود. در این مورد مجموع تعداد دانش آموزان دختر و پسر را به عنوان جمعیت معیار اختیاری فرض می‌نماییم.

جدول ۹-۴. محاسبه میانگین تطبیق شده تعداد دندانهای پوسیده پسران و دختران

گروه سنی (سال)	میانگین تعداد دندانهای پوسیده		جمعیت معیار	تعداد دندانهای پوسیده منتظره	
	پسران	دختران		پسران	دختران
کمتر از ۸	۶/۹۲	۶/۷۱	۲۶۹	۱۸۶۱/۴۸	۱۸۰۴/۹۹
۸	۷/۵۴	۶/۱۱	۲۰۲	۱۵۲۳/۰۸	۱۲۳۴/۲۲
۹	۵/۹۸	۵/۷۲	۲۱۰	۱۲۵۵/۸۰	۱۲۰۱/۲۰
۱۰	۵/۴۰	۴/۴۷	۲۱۴	۱۱۵۵/۶۰	۹۵۶/۵۸
۱۱	۳/۵۰	۳/۱۳	۲۴۰	۸۴۰/۰۰	۷۵۱/۲۰
۱۲	۲/۰۶	۱/۶۸	۲۰۷	۴۲۶/۴۲	۳۴۷/۷۶
۱۳+	۰/۶۵	۰/۳۷	۱۷۳	۱۱۲/۴۵	۶۴/۰۱
جمع	۴/۵۲	۴/۴۳	۱۵۱۵	۷۱۷۴/۸۳	۶۳۵۹/۹۶

با استفاده از این جدول میانگین تطبیق شده تعداد دندانهای پوسیده برابر خواهد شد با:

برای پسران $\frac{۷۱۷۴/۸۳}{۱۵۱۵} = ۴/۷۴$

برای دختران $\frac{۶۳۵۹/۹۶}{۱۵۱۵} = ۴/۲۰$

و ملاحظه می‌شود که پس از ازبین بردن اثر سن، برخلاف قضاوت قبلی، اختلاف بین دختران و پسران از لحاظ پوسیدگی دندانها آشکار می‌گردد.

۹-۳-۲: تطبیق به روش غیر مستقیم و محاسبه نسبت مرگ معیار[1]

در این روش برخلاف روش مستقیم به جای بکار بردن جمعیت معیار از میزان‌های اختصاصی

1. Standard mortality ratio

معیار استفاده می‌شود. بدین معنی که بدواً میزانهـای اختصاصـی سـنی وزنـی حاصـل از جامعـه‌هـا ترکیبی محاسبه می‌شود:

$$R_i = \frac{d_{1i} + d_{2i}}{N_i}$$

R_i= میزان ترکیبی در گروه سنی i

d_{1i}= تعداد مرگ در گروه سنی i در جامعه ۱

d_{2i}= تعداد مرگ در گروه سنی i در جامعه ۲

N_i= جمع تعداد افراد گروه سنی i در جامعه ۱ و ۲ $(N_i = n_{1i} + n_{2i})$

با بکار بردن میزانهای اختصاصی معیار(R_i) در هر کدام از جمعیـت‌هـای گـروه‌هـای سـنی دو جمعیت (n_{2i} و n_{1i}) تعداد مرگهای منتظره در هر کدام از دو جمعیت (D_1 و D_2)، معین می‌گردد:

مرگهای منتظره برای جامعه ۱ $D_1 = \Sigma R_i n_{1i}$

مرگها منتظره برای جامعه ۲ $D_2 = \Sigma R_i n_{2i}$

نسبت مرگ معیار (SMR) برای هر کدام از جمعیت‌ها برابـر خواهـد شـد بـا نسـبت مرگهـای مشاهده شده به نسبت مرگهای منتظره.

$$SMR_1 = \frac{\sum d_{1i}}{D_1}$$

$$SMR_2 = \frac{\sum d_{2i}}{D_2}$$

به عنوان مثال میزان مرگ در نمونه‌های شهری و روستایی که قبلا با روش مستقیم تطبیـق شـده بود با روش غیرمستقیم در جدول ۹-۵ تطبیق داده شده و SMR محاسبه شده اسـت. جـدول ۹-۶ خلاصه نتایج جدول ۹-۵ را همراه با مرگ‌های مشاهده شده و SMR بدست آمده نشان می‌دهد.

جدول شماره ۹–۵. محاسبه نسبت مرگ معیار شهر و روستا

گروه سنی	جمعیت شهر	جمعیت روستا	جمعیت شهر و روستا	مرگهای شهر و روستا	میزان مرگ ترکیبی	مرگهای منتظره شهر	مرگهای منتظره روستا
۰–٤	۱۸٤۷۵	۲٦۲۵۰	٤٤۷۲۵	۱۳۵٤	۳۰/۲۷	۵۵۹/۲۵	۷۹٤/۵۹
۵–۹	۲۱٦۰۳	۲٦٤۳۷	٤۸۰٤۰	۷۰	۱/٤٦	۳۱/۵٤	۳۸/٦۱
۱۰–۱٤	۲۲۵۸۹	۲۱۸۱۱	٤٤٤۰۰	۲٤	۰/۵٤	۱۲/۲۱	۱۱/۷۹
۱۵–۱۹	۱۸۵۷۱	۱٦۱٤۰	۳٤۷۱۱	٤۰	۱/۱۵	۲۱/۳۷	۱۸/۵۷
۲۰–۲٤	۱۳۱۹۱	۱۱۳۹۸	۲٤۵۸۹	٤۱	۱/٦۷	۲۲/۰٤	۱۹/۰٤
۲۵–۲۹	۱۹۱۷۵	۸۳۹۹	۲۷۵۷٤	۲۵	۱/٤۲	۱۳/۰۳	۱۱/۹٤
۳۰–۳٤	۸۱۱۷	۷۸۵۲	۱۵٦۹٦	۳۳	۲/۰۷	۱٦/۸۱	۱٦/۲٦
۳۵–۳۹	۷۹۲۲	۸۰۰٦	۱۵۹۲۸	٤۰	۲/۵۱	۹/۸۸	۲۰/۱۱
٤۰–٤٤	۷۵٦۱	۷٦۲۰	۱۵۱۸۱	٤٦	۳/۰۳	۲۲/۹۲	۲۳/۰۹
٤۵–٤۹	۵۷۰۵	٦۱٦۷	۱۱۸۷۲	٤۸	٤/۰٤	۲۳/۰٦	۲٤/۹۱
۵۰–۵٤	۵۱٤۳	۵۲۱۷	۱۰۳٦۰	۱۱۷	۱۱/۲۹	۵۸/۰٦	۵۸/۹۰
۵۵–۵۹	۲۲۵٤	۲۹۵۳	۵۲۰۷	۵۳	۱۰/۱۸	۲۲/۹۵	۳۰/۰٦
٦۰–٦٤	۲۵۹۷	۳٦٦۸	٦۲٦۵	۱۲۲	۱۹/٤۷	۵۰/۵۵	۷۱/٤۲
٦۵–٦۹	۱۱۲۹	۲۱۳۹	۳۲٦۸	۷۸	۲۳/۸۷	۲٦/۹۵	۵۱/۰٦
۷۰+	۲۰۸٤	٤۰٦۷	٦۱۵۱	۳۸۳	٦۲/۲۷	۱۲۹/۷۷	۲۵۳/۲۵
جمع	۱۵٦۱۱٦	۱۵۸۱۲٤	۳۱٤۲٤۰	۲٤۷٤		۱۰۳۰/٤۰	۱٤٤۳/٦۰

جدول ۹–٦. نتایج محاسبات جدول ۹–۵ و SMR های محاسبه شده

	شهر	روستا	جمع
مرگهای مشاهده شده	۸۸٦	۱۵۸۸	۲٤۷٤
مرگهای منتظره	۱۰۳۰/٤۰	۱٤٤۳/٦۰	۲٤۷٤
SMR	۰/۸٦۰	۱/۱۰۰	۱/۰۰۰

همانگونه که ملاحظه می‌شود با این روش نیز همان نتیجه‌ای که از روش مستقیم تطبیق بدست آمده، گرفته می‌شود. به عبارت دیگر اختلاف میان مرگ شهر و روستا برقرار می‌ماند ولی نسبت این اختلاف از ۱/٦٦ به $۱/۲۸ = \frac{۱/۱۰۰}{۰/۸٦۰}$ تقلیل می‌یابد.

مشابه آنچه در قسمت ۹–۲ برای محاسبه حدود اعتماد میزان بیان شده خطای معیار Ln SMR برابر است با :

$$SE(Ln\,\mathrm{SMR}) = \frac{1}{\sqrt{d}}$$

که در این رابطه d عبارت است از جمع مرگهای مشاهده شده در گروه مربوطه. بنابراین حدود اعتماد $(1-\alpha)$ درصد برای SMR از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

حدود اعتماد $(۱ - \alpha)$ برای نسبت مرگ معیار $= \frac{SMR}{EF}\ ,\ SMR \times EF$

مقدار فاکتور خطا (EF) برای حدود اعتماد ۹۵ درصد به ترتیب برای شهر و روستا عبارت است از:

فاکتور خطا در شهر $= e^{۱/۹۶/\sqrt{۸۸۶}} = ۱/۰۷$

فاکتور خطا در روستا $= e^{۱/۹۶/\sqrt{۱۵۸۸}} = ۱/۰۵$

بنابراین حدود اعتماد ۹۵ درصد برای SMR از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

حدود اعتماد ۹۵ درصد SMR برای شهر $= \frac{۰/۸۶۰}{۱/۰۷}$ و $۰/۸۶۰ \times ۱/۰۷$

حدود اعتماد ۹۵ درصد SMR برای روستا $= \frac{۱/۱۰۰}{۱/۰۵}$ و $۱/۱۰۰ \times ۱/۰۵$

بنابراین حدود مورد نظر برای شهر برابر ۰/۸۱ تا ۰/۹۲ و برای روستا ۱/۰۵ تا ۱/۱۶ خواهد شد. روش تطبیق غیر مستقیم و تعیین SMR در همه گیری شناسی و بررسیهای آماری مثلاً برای تعیین خطرات ناشی از شغل، وخامت بیماری، اثرات استعمال دخانیات و غیره، زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۹-٤. آزمون معنی‌دار بودن اختلاف شاخص‌ها

شاخص‌های ساده را می‌توان به همان روشی که در فصل ششم در مقایسه نسبتها و یا در فصل هشتم در مطالعه بین دو صفت کیفی بیان شد، مقایسه کرد. در مورد شاخص‌های تطبیق شده، لازم می‌شود که اطلاعات موجود درباره شاخص‌ها، در تعدادی جدول ۲ × ۲ را یکجا در نظر گرفته و براساس آن درباره اختلاف شاخص‌های تطبیق شده قضاوت کرد. مثلا مقایسه دو نوع درمان در چندین مطالعه و یا اینکه در یک مطالعه افراد بر حسب سطوح مختلف یک یا چند متغیر مانند سن، جنس، سطح سواد و غیره که امکان دارد در نتایج حاصل موثر باشند، طبقه بندی شده باشد. در اینگونه موارد از ترکیب نتایج حاصل از جداول ۲×۲ مختلف به انجام آزمون دو شاخص تطبیق شده مبادرت می‌شود.

به عنوان مثال، اطلاعات جدول ۹-۷ را که براساس یک آمارگیری نمونه‌ای در استان اصفهان در سال ۱۳۵۳ توسط دانشکده بهداشت دانشگاه تهران بدست آمده در نظر می‌گیریم. مقایسه اختلاف

شیوع بیماری گوش در مرد و زن، از نوع مسئله ذکر شده در فوق است.

جدول ۹-۷. فراوانی بیماری‌های گوش در نمونه انتخاب شده از جامعه شهری استان اصفهان برحسب سن و جنس

گروه سنی (سال)	جنس	بیمار	سالم	جمع	درصد بیمار	χ^2 با درجه آزادی ۱
	مرد	٤٦	۱۹٦۲	n_{11}=۲۰۰۸	$\hat{p}_{11}$ = ۲/۲۹	
کمتر از ۲۰	زن	۲۹	۱۸٤٥	n_{12}=۱۸۷٤	$\hat{p}_{12}$ = ۱/٥٥	
	جمع	C_{11}=۷٥	C_{12}=۳۸۰۷	n_{1} =۳۸۸۲	$\hat{p}_{1}$ = ۱/۹۳	۲/۸۳
	مرد	٦	٦٥۷	n_{21} =٦٦۳	$\hat{p}_{21}$ =۰/۹۰	
۲۰-۳۹	زن	۳	۸۸۲	n_{22} =۸۸٥	$\hat{p}_{22}$=۰/۳٤	
	جمع	C_{21} =۹	C_{22} =۱٥۳۹	n_{2} = ۱٥٤۸	$\hat{p}_{2}$ = ۰/٥۸	۲/۱۰
	مرد	۱٤	٤٦٤	n_{31} = ٤۷۸	$\hat{p}_{31}$ = ۲/۹۳	
٤۰-٥۹	زن	۹	٤٥۲	n_{32} =٤٦۱	$\hat{p}_{32}$ =۱/۹٥	
	جمع	C_{31}=۲۳	C_{32}=۹۱٦	n_{3} =۹۳۹	$\hat{p}_{3}$ =۲/٤٥	۰/۹٤
	مرد	٦٦	۳۰۸۳	n_{1} =۳۱٤۹	$\hat{p}_{.1}$ =۲/۱۰	
مجموع	زن	٤۱	۳۱۷۹	n_{2} =۳۲۲۰	$\hat{p}_{.2}$ =۱/۲۷	
	جمع	C_{1}=۱۰۷	C_{2}=٦۲٦۲	n =٦۳٦۹	$\hat{p}_{..}$=۱/٦۸	٦/٥۲

از آنجا که توزیع سن در دو گروه جنسی یکسان نیست و میزان شیوع این بیماری در سنین مختلف نیز متفاوت است و منظور از این مطالعه تنها مقایسه آن از نظر جنس می‌باشد، لذا در هر گروه سنی، مقایسه‌ای جداگانه انجام گرفت. این همان مقایسه عادی مربوط به دو صفت کیفی است که در فصل هشتم به آن اشاره شد.

بررسی جداگانه هر یک از این جداول ۲×۲ نشان می‌دهد که مقدار χ^2 برای هیچ یک از این گروه‌ها معنی‌دار نیست. اما نظر به اینکه در هر سه گروه سنی، نسبت بیماری در مردها بیش از زنها است، ما را بر آن می‌دارد که با ترکیب نتایج حاصل از این سه جدول، با انجام آزمون حساس‌تری برای مقایسه نسبت بیماری در مرد و زن مبادرت کنیم.

راه ساده عبارت است از محاسبه χ (جذر χ^2) برای هر کدام از جداول. سپس علامت χ ها را

همان علامت اختلاف $d_i = p_{i1} - p_{i2}$ در نظر گرفته و آنها را جمع می‌کنیم. به این ترتیب از جدول فوق که در آن کلیه d_i ها مثبت است خواهیم داشت:

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 1/68 + 1/45 + 0/97$$
$$= 4/10$$

تحت فرضیه H_0، هر کدام از χ_i ها یک کمیت با توزیع نرمال استاندارد می‌باشد. بنابراین جمع سه χ یک کمیت با توزیع نرمال خواهد بود که میانگین آن صفر و انحراف معیار آن $SD = \sqrt{3}$ است. به این ترتیب ملاک آزمون عبارت است از:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{g} \chi_i}{\sqrt{g}}$$

که در آن g معرف تعداد جداول ۲×۲ است، و در این مورد بقرار زیر خواهد بود:

$$z = \frac{4/10}{\sqrt{3}} = 2/37$$

در جدول توزیع نرمال برای آزمون دو دامنه مقدار $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ برای $\alpha = 0/05$ برابر ۱/۹۶ و برای $\alpha = 0/01$ برابر ۲/۵۸ است. لذا نتیجه می‌شود که در سطح اشتباه ۰/۰۵ اختلاف در مجموع معنی‌دار است.

باید در نظر داشت که آزمون فوق در صورتی رضایت بخش است که اولاً نسبت n_i ها از جدولی به جدول دیگر از ۲ به ۱ تجاوز نکند و ثانیاً میدان تغییرات $\hat{p}_i$ ها در فاصله ۲۰ تا ۸۰ درصد باشد. چون اگر نسبت n_i ها اختلاف زیادی داشته باشند، جداول کوچک، وزن زیادی پیدا نموده و آزمون توان کمی برای نشان دادن اشتباه فرضیه یکسان بودن خواهد داشت. و نیز در صورتیکه p_i ها در بعضی جداول به صفر و یا ۱۰۰ درصد نزدیک بوده و در بعضی دیگر در حوالی ۵۰ درصد باشند، احتمالاً اختلاف دو جامعه (d_i) بر حسب مقدار $\hat{p}_{ij}$ تغییر می‌کند.

در عمل مدل ریاضی که برای بیان چگونگی تغییر d_i بر حسب p_{i2} بکار گرفته می‌شود. فرض می‌کنند اختلاف بین دو جامعه با یک مقیاس لوژیت[1] ثابت باشد. لوژیت برای یک نسبت p برابر است با $\log_e \frac{p}{1-p}$. بنابراین یک اختلاف ثابت با مقیاس لوژیت به این معنی است که

1. Logit

$\log_e(\frac{p_{i1}}{1-p_{i1}}) - \log_e(\frac{p_{i2}}{1-p_{i2}})$ با تغییر P_{i2} ثابت بماند.

آزمونی که وزن مناسبی به جداول با n_i بزرگ می‌دهد و در صورت ثابت بودن اختلاف‌ها در مقیاس لوژیت حساس می‌باشد، بوسیله کوکران[1] تدوین شده است. ملاک این آزمون عبارت است از:

$$z = \frac{\sum w_i d_i}{\sqrt{\sum w_i \hat{p}_i (1-\hat{p}_i)}}$$

که در آن:

$$w_i = \frac{n_{i1} n_{i2}}{n_{i1} + n_{i2}}$$

و

$$d_i = \hat{p}_{i1} - \hat{p}_{i2}$$

در صورت صحیح بودن فرضیه H_0 ، یعنی یکسان بودن نسبت در دو جامعه، این ملاک دارای توزیع نرمال استاندارد است و قدر مطلق آن با مراجعه به سطح زیر منحنی نرمال، با $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ مقایسه می‌گردد. در مثال فوق خواهیم داشت:

گروه سنی (سال)	w_i	d_i	$w_i d_i$	$\hat{p}_i$	$\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$	$w_i \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
کمتر از ۲۰	۹٦۹/۳	۰/۰۰۷٤	۷/۱۷	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۸۹	۱۸/۳۲
۲۰-۳۹	۳۷۹/۰	۰/۰۰٥٦	۲/۱۲	۰/۰۰٥۸	۰/۰۰٥۸	۲/۲۰
٤۰-٥۹	۲۳٤/۷	۰/۰۰۹۸	۲/۳۰	۰/۰۲٤٥	۰/۰۲۳۹	٥/٦۱
جمع			۱۱/٥۹			۲٦/۱۳

1. Cochran

و ملاک آزمون برابر است با :

$$z = \frac{۱۱/۵۹}{\sqrt{۲۶/۱۳}} = ۲/۲۷$$

با این روش نیز اختلاف بین مرد و زن معنی‌دار بدست می‌آید.

گیریم در جدول i ام از این جداول ۲×۲ تعداد موارد مشاهده شده برای یکی از خانه‌ها، مثلاً مردان بیمار، با O_i و مقدار منتظره تحت فرضیه H_0، برای این گروه با E_i نشان داده شود. برای سن کمتر از ۲۰ سال داریم ٤٦=O_1 و $E_1 = \frac{۲۰۰۸ \times ۷۵}{۳۸۸۲} = ۳۸/۷۹$ و $O_1 - E_1 = ۷/۲۱$ که برابر است با w_1d_1. این رابطه از نظر جبری نیز برای جداول ۲×۲ ثابت می‌شود و اختلاف جزئی که در اینجا مشاهده شده مربوط به تقریب در اعشار محاسبات است. به همین ترتیب، E_i های سه گانه به شرح جدول ۹-۸ بدست می‌آید. به علاوه با به کار بردن نامگذاری جدول ۹-۷ می‌توان ثابت کرد:

$$\sum w_i \hat{p}_i (۱ - \hat{p}_i) = \sum \frac{n_{i۱} n_{i۲} C_{i۱} C_{i۲}}{n_i^۳}$$

جدول ۹ - ۸

گروه سنی (سال)	O_i	E_i	$\frac{n_{i۱} n_{i۲} C_{i۱} C_{i۲}}{n_i^۳}$
کمتر از ۲۰	٤٦	۳۸/۷۹	۱۸/۳۷
۲۰-۳۹	٦	۳/۸۵	۲/۱۹
٤۰-۵۹	۱٤	۱۱/۷۱	۵/٦۱
جمع	٦٦	۵٤/۳۵	۲٦/۱۷

به این ترتیب ملاک z فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$z = \frac{\sum (O_i - E_i)}{\sqrt{\sum \frac{n_{i۱} n_{i۲} C_{i۱} C_{i۲}}{n_i^۳}}}$$

این شکل از آزمون با یک تغییر جزئی بوسیله مانتل و هنزل[1] معرفی شده است که برای n های کوچک با ارزش است. در این روش در محاسبه واریانس $w_i d_i$ یا $(O_i - E_i)$ بجای

1. Mantel and Haenszel

($\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)\,w_i$) که برابر است با $\frac{n_{i1}n_{i2}\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{n_{i1}+n_{i2}}$ از $\frac{n_{i1}n_{i2}\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{(n_{i1}+n_{i2}-1)}$ استفاده می‌شود که در واقع به جای مقایسه دو توزیع دو جمله‌ای، کل حاشیه‌های جدول را ثابت فرض کرده و براساس توزیع فوق هندسی واریانس را محاسبه می‌کند. با بکار بردن علائم داده شده در جدول ۹-۷ مقدار آن برابر است با $\frac{n_{i1}n_{i2}C_{i1}C_{i2}}{n_i^2(n_i-1)}$ در جدول ۹-۹ ملاک آزمون براین اساس محاسبه شده است.

جدول ۹ – ۹.

گروه سنی (سال)	O_i	E_i	$V_i = \frac{n_{i1}n_{i2}C_{i1}C_{i2}}{n_i^2(n_i-1)}$
کمتر از ۲۰	٤٦	۳۸/۷۹	۱۸/۳۷
۳۹–۲۰	٦	۳/۸۵	۲/۱۹
٥۹–٤۰	١٤	۱۱/۷۱	٥/٦۱
جمع	٦٦	٥٤/۳٥	V = ۲٦/۱۷
$z = (٦٦ - ٥٤/۳٥) / \sqrt{۲٦/۱۷} = ۲/۲۸$			

که می‌توان این ملاک را با جدول z مقایسه کرد و یا مجذور آن را که به نام χ^2 مانتل هنزل معروف است و با χ^2_{MH} نشان داده می‌شود را با χ^2 با یک درجه آزادی از جدول مقایسه نمود. در مثال فوق برای $\alpha = ۰/۰٥$ ، $z = ۲/۲۸$ با مقدار ۱/۹٦ و یا $\chi^2_{MH} = \frac{(٦٦-٥٤/۳٥)^2}{۲٦/۱۷} = ٥/۱۹$ با ۳/۸٤ مقایسه می‌شود.

۹-٥. مقایسه شاخص‌ها با جامعه استاندارد یا میزانهای نظری

در مقایسه اختلاف شاخص‌ها بسیار اتفاق می‌افتد که بخواهیم شاخص‌های بدست آمده از یک مطالعه را با شاخص‌های مربوط به کل جامعه و یا با شاخص‌های نظری دیگری مقایسه کنیم، مثلاً اگر بخواهیم میزانهای مرگ اختصاصی سنی یک بیماری را با میزانهای مرگ اختصاصی سنی کل جامعه مقایسه کنیم، می‌توان میزانهای مربوط به کل جامعه را به عنوان میزانهای نظری فرض کرد.

در این موارد ممکن است در هر گروه اختصاصی (مثلاً سن) به روش ذکر شده در ٦-٥ نسبت مشاهده شده در آن گروه را با نسبت نظری آن گروه مقایسه کرده و ملاک z را بدست آورد. ولی اگر بخواهیم این آزمون را در کلیه گروه‌ها یکجا انجام دهیم، می‌توان براساس همان شیوه‌ای که در

شروع قسمت ۹-٤ بیان شد، عمل کرد.

به این ترتیب، تحت فرضیه H_0، مقدار z در مقایسه مربوط به هر یک از گروه‌های اختصاصی یک کمیت نرمال استاندارد می‌باشد. بنابراین جمع z ها برای کلیه گروه‌های اختصاصی، یک کمیت با توزیع نرمال خواهد بود که میانگین آن صفر و انحراف معیار آن $SD = \sqrt{g}$ که g عبارت است از تعداد گروه‌های اختصاصی. براین اساس ملاک آزمون عبارت است از:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{g} z_i}{\sqrt{g}}$$

که برای آزمون دو دامنه قدر مطلق ملاک بدست آمده با $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ مقایسه می‌گردد.

از آنجا که وقوع موارد مورد نظر در اکثر میزانها حادثه‌ای است بسیار نادر، می‌توان برای آزمون فوق از روشی که در مثال زیر ارائه می‌شود نیز استفاده کرد.

مثال: در یک مطالعه که در سال ۱۹٦۲ در فیلادلفیا صورت گرفت، مشاهده شد از ۳۱۳۸ مرد که دارای سل ریوی بودند در یکسال ۳۷ مورد مرگ در اثر سرطان ریه رخ داده است. این مرگها بیش از آن است که انتظار می‌رود در افراد غیر مسلول رخ دهد (جدول ۹-۱۰) برای آزمون این فرضیه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

جدول ۹-۱۰. مرگ از سرطان ریه در افراد مسلول (فیلادلفیا ۱۹٦۲)

گروه سنی	میزان مرگ مردان از سرطان ریه $R_i \times 10^5$	تعداد مسلولین n_i	مرگ از سرطان ریه بین مسلولین O_i	مرگهای منتظره از سرطان ریه در مسلولین n_iR_i
۲۵-۳٤	٦	۲٦۷	۱	۰/۰۲
۳۵-٤٤	۱۷	٦۱۷	۲	۰/۱۰
٤۵-۵٤	۷۳	۷۸۰	۹	۰/۵۷
۵۵-٦٤	۲۳٤	۸۳٤	۱۲	۱/۹۵
٦۵-۷٤	۳٦۸	٤۷۰	۱۰	۱/۷۳
+۷۵	۳٤۷	۱۷۰	۳	۰/۵۹
جمع		۳۱۳۸	۳۷	٤/۹٦

نظر به اینکه در این بررسی میزانهای اختصاصی سنی مرگ از سرطان ریه در دست بوده و حداکثر آن از ۰/۰۰۵ کمتر است، لذا براساس آنچه در فصل سوم در توزیع دو جمله‌ای برای nهای بزرگ و p های کوچک گفته شد، می‌توان قبول کرد که تحت فرضیه H_0 یعنی یکسان بودن

میزان مرگ بین مسلولین و غیر مسلولین در هر گروه سنی (i) تعداد موارد مرگ (O_i) از یک توزیع پوآسون با میانگین $E_i = nR_i$ که در آن n_i، تعداد نمونه در این گروه و R_i، نسبت نظری مرگ برای این گروه است، پیروی کند.

چون جمع کمیت های با توزیع پوآسون که مستقل از هم باشند نیز دارای یک توزیع پوآسون با میانگینی برابر جمع میانگین‌ها است، لذا ΣO_i کمیتی است با توزیع پوآسون با میانگین ΣE_i .
حال با بکار بردن تقریب نرمال برای این توزیع پوآسون، ملاک آزمون عبارت خواهد بود از:

$$z = \frac{\sum O_i - \sum E_i}{\sqrt{\sum E_i}}$$

که در یک آزمون دو دامنه قدر مطلق آن با $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ مقایسه می‌گردد.

در این مثال مقدار ملاک z برابر است با :

$$z = \frac{۳۷ - ۴/۹۶}{\sqrt{۴/۹}} = ۱۴/۴۷$$

که بدون شک معنی‌دار خواهد شد. در نتیجه، این مشاهدات نشان می‌دهد که میزان مرگ از سرطان ریه بین مسلولین به مراتب بیشتر از میزان مرگ از سرطان ریه در غیر مسلولین است. در واقع برآورد SMR برابر است با :

$$SMR = \frac{۳۷}{۴/۹۶} = ۷/۴۶$$

تمرین

۱. اطلاعات زیر مربوط به مطالعه یک درصد از جمعیت شهری و روستایی کشور در سال ۱۳٦٦ می‌باشد که توسط وزارت بهداشت، درمان و آموزش پزشکی انجام شده است.

اطلاعات	شهر	روستا
جمعیت کل	۲۷٦۱۹۰	۲۳٥٥۸٦
جمعیت کمتر از ٥ سال	٤۰۹۰۲	۳۹۹۰۳
مرگ کل	۱٥۰۳	۱۷۱۱
مرگ کمتر از ٥ سال	٤۲۸	۸۱٤
مرگ از اسهال در گروه سنی کمتر از ٥ سال	۸٤	۱۷۸
مرگ از بیماریهای عفونی در گروه سنی کمتر از ٥ سال	۱۲٤	۲٦۳

در صورتیکه جمعیت مربوط به وسط سال و وقایع مربوط به طول سال باشد کلیه میزان‌هایی را که به نظر شما منطقی می‌رسد به تفکیک شهر و روستا محاسبه کنید.

۲. میزانهای مرگ و حدود اعتماد ۹٥ درصد آن را برای هر یک از دو گروه سنی زیر محاسبه کرده درباره آنها بحث کنید.

گروه سنی (سال)		
۰-۱٤	جمعیت وسط سال	۲٤۱۳۹
	کل موارد مرگ	۷۷
	مرگ از بیماری قلب	٦
	مرگ از بیماری‌های عفونی	٥۱
٤٥-٥۹	جمعیت وسط سال	۸۱۸۱
	کل موارد مرگ	٦٥
	مرگ از بیماری قلب	۲۱
	مرگ از بیماری‌های عفونی	۳

۳. در یک مطالعه که در سال ۱۳۵۲ به توسط دانشکده بهداشت دانشگاه تهران در یک درصد جمعیت ایران به عمل آمد، توزیع سنی و تعداد موارد مرگ بر حسب شهر و روستا به صورت جدول زیر است:

گروه سنی	روستا		شهر	
	جمعیت	موارد مرگ	جمعیت	موارد مرگ
۰–۴	۲۶۲۸۴	۱۰۵۳	۱۸۴۷۵	۳۰۱
۵–۹	۲۶۴۳۴	۵۰	۲۱۶۰۳	۲۰
۱۰–۱۴	۲۱۸۰۲	۱۷	۲۲۵۸۹	۷
۱۵–۱۹	۱۶۱۴۵	۲۸	۱۸۵۷۱	۱۲
۲۰–۲۴	۱۱۳۹۹	۲۳	۱۳۱۹۱	۱۸
۲۵–۲۹	۸۳۹۵	۱۶	۹۱۷۵	۹
۳۰–۳۴	۷۸۴۲	۲۰	۸۱۱۷	۱۳
۳۵–۳۹	۸۰۰۱	۲۳	۷۹۲۲	۱۷
۴۰–۴۴	۷۶۱۸	۲۷	۷۵۶۱	۱۹
۴۵–۴۹	۶۱۶۵	۲۱	۵۷۰۵	۲۷
۵۰–۵۴	۵۲۱۸	۶۴	۵۱۴۳	۵۳
۵۵–۵۹	۲۹۵۱	۲۱	۲۲۵۴	۳۲
۶۰–۶۴	۳۶۶۸	۵۸	۲۵۹۷	۶۴
۶۵–۶۹	۲۱۳۸	۴۱	۱۱۲۹	۳۷
۷۰ +	۴۰۶۴	۱۲۶	۲۰۸۴	۲۵۷
جمع	۱۵۸۱۲۴	۱۵۸۸	۱۴۶۱۱۶	۸۸۶

الف: درباره چگونگی توزیع سن در این دو نمونه بحث کنید.

ب: میزان مرگ خام را برای جامعه شهری و جامعه روستایی برآورد کنید.

ج: میزان مرگ‌های اختصاصی سنی را در هر یک از دو گروه محاسبه کنید.

د: این دو گروه از میزانها را روی یک نمودار رسم کرده و درباره آنها بحث کنید.

هـ : با استفاده از میزان مرگ اختصاصی، میزان مرگ تطبیق شده را برای هر یک از دو گروه شهر و روستا محاسبه کنید و نسبت میزان مرگ شهر به روستا را به طور خام و پس از تطبیق دادن مقایسه کنید.

٤. جدول زیر شیوع بیماری‌های گوش را در یک مطالعه که در سال ۱۳۵۲ به توسط دانشکده بهداشت دانشگاه تهران در ۲/۳ درصد جمعیت ساکن استان اصفهان بـه عمـل آمـده در منطقـه روستایی بر حسب جنس نشان می‌دهد.

سن (سال)	جنس	بیمار	سالم	جمع
	مرد	۷۰	۱٦٦٤	۱۷۳٤
کمتر از ۲۰	زن	٦۹	۱٥۸۷	۱٦٥٦
	جمع	۱۳۹	۳۲٥۱	۳۳۹۰
	مرد	۱۳	٤۸۸	٥۰۱
۲۰-۳۹	زن	۱۲	٦٤٥	٦٥۷
	جمع	۲٥	۱۱۳۳	۱۱٥۸
	مرد	۲۱	۳٥٤	۳۷٥
٤۰-٥۹	زن	۲٥	۳٥۷	۳۸۲
	جمع	٤٦	۷۱۱	۷٥۷

الف: میزان شیوع تطبیق شده برای مرد و زن را محاسبه کنید.

ب: یکسان بودن میزان شیوع در مرد و زن را براساس χ^2_{MH} آزمون کنید.

ج: میزانهای شیوع سنی مردان را با میزانهای فرضی ۰/۰٥ برای گـروه سـنی کمتـر از ۲۰ سـال، ۰/۰۱ برای گروه سنی ۳۹-۲۰ سال و ۰/۱٥ برای گروه سنی ٥۹-٤۰ سال آزمون کنید.

٥. برای اطلاعات جدول مساله ٤، SMR را محاسبه کنید و حدود اعتماد آن را برای ۹٥ درصد بدست آورید.

فصل دهم
تحلیل مطالعات اپیدمیولوژیک

۱۰-۱. انواع مطالعات اپیدمیولوژیک

مطالعات اپیدمیولوژیک را می‌توان به دو گروه اصلی مداخله ای[۱] و مشاهده‌ای[۲] تقسیم کرد. مطالعه مداخله‌ای نوعی مطالعه است که در آن محقق تا آنجا که اخلاق پزشکی اجازه دهد در مطالعه مداخله می‌کند. کاملترین این مطالعه برای جامعه انسانی کارآزمایی[۳] دارای گروه کنترل از نوع تصادفی است که در آن محقق پس از تعیین ضوابط ورود به مطالعه، افراد را که معمولاً بیماران می‌باشند به صورت تصادفی به دو گروه مواجهه و عدم مواجهه با عامل مورد نظر منسوب می‌کند و آنگاه پاسخ افراد را در دو گروه مشاهده و ثبت می‌کند. از این روش می‌توان برای اثر بخشی واکسن و سایر فرآورده‌های بیولوژیک و مداخلات اجتماعی نیز استفاده کرد که در این صورت واحد مورد مطالعه فرد سالم و یا جمعیت ساکن در منطقه‌ای خواهد بود.

در مطالعات مشاهده‌ای برخلاف مداخله‌ای محقق تنها به مشاهده اتفاقات و ثبت آنها اقدام می‌کند. در کتب اپیدمیولوژی مطالعات مشاهده‌ای به چهار صورت همگروهی[۴]، مورد شاهدی[۵]، مقطعی[۶] یا مبتنی بر جامعه و اکولوژیک[۷] بیان شده است که به اختصار شرح داده می‌شود.

در مطالعات همگروهی دو گروه که عاری از بیماری یا مشکل هستند مطالعه می‌شوند لیکن یک گروه مواجهه با عامل و گروه دیگر غیر مواجهه با عامل است (مثل دو گروه کارگر در کارخانه‌ای که یکی در محیط پر سر و صدا و دیگری در محیط بی سر و صدا کار می‌کنند). هر دو

---

1. Interventional
2. Observational
3. Trail
4. Cohort
5. Case - control
6. Cross- sectional
7. Ecologic

گروه برای مدتی که ممکن است سالها طول بکشد پی‌گیری می‌شوند و بروز بیماری یا مشکل مورد نظر در آنها بررسی و ثبت می‌گردد. این مطالعه می‌تواند به صورت همگروهی آینده‌نگر و همگروهی گذشته‌نگر انجام شود. مطالعه همگروهی گذشته‌نگر هنگامی میسر است که داده‌ها و مدارک لازم برای مطالعه در سازمان یا نهادی از پیش به دقت تعریف و جمع‌آوری شده باشد. در این صورت به جای اینکه محقق منتظر بروز بیماری یا مشکل باشد می‌تواند ارتباط بیماری یا مشکل موجود را با عامل مواجهه که از قبل تعریف و ثبت شده است بررسی کند.

در مطالعات مورد شاهدی افراد بیمار یا دارای مشکل را با افراد سالم یا عاری از مشکل از نظر مواجهه یا عدم مواجهه با عاملی در گذشته بررسی می‌کنیم. در این مطالعه نمی‌توان نسبت بروز تجمعی یا میزان بروز را محاسبه کرد. لیکن در شرایط خاصی می‌توان آن را با تقریب محاسبه کرد.

در مطالعات مقطعی وضعیت بیماری یا مشکل در زمان حال و وضعیت عامل مواجهه در زمان حال یا گذشته روی نمونه‌ای از جامعه بررسی می‌شود. از این مطالعه معمولاً برای برآورد نسبت شیوع و همچنین توصیف وضعیت اپیدمیولوژیک بیماری و بالاخره تدوین فرضیه استفاده می‌شود.

مطالعات اکولوژیک مطالعاتی است که در آن فرد، واحد مطالعه نیست بلکه واحد مطالعه گروه یا جمعیت‌هایی هستند که دارای شرایط جمعیت شناسی و اقتصادی و اجتماعی متفاوت می‌باشند. این مطالعات را مطالعات همبستگی هم می‌نامند.

۱۰-۲. اصول کلی در تحلیل مطالعات اپیدمیولوژیک

در تحلیل مطالعات اپیدمیولوژیک اگر مقایسه دو گروه مورد نظر باشد نتیجه مطالعه در ساده‌ترین شکل آن به صورت جدول ۲×۲ با شمای کلی زیر بیان می‌شود که در این فصل به طور مکرر به آن اشاره خواهد شد.

مواجهه / بیماری	آری	خیر	جمع
آری	a	b	$a+b=m_1$
خیر	c	d	$c+d=m_0$
جمع	$a+c=n_1$	$b+d=n_0$	$a+c+b+d=T$

نکته مهم تفسیر صحیح این جدول در ارتباط با نوع مطالعه است که اینک به شرح آن می‌پردازیم. اگر مطالعه مقطعی باشد مفهومش آن است که یک نمونه تصادفی از جامعه انتخاب شده

و افراد مورد مطالعه از نظر داشتن یا نداشتن بیماری در زمان حال، مواجهه یا عدم مواجهه با عامل بیماری در زمان حال یا گذشته بررسی شده‌اند. در اینجا چون نمونه یک نمونه تصادفی است محاسبه نسبت‌ها برحسب جمع ستونها (وضعیت مواجهه)، جمع سطرها (وضعیت بیماری) و جمع کل (وضعیت مواجهه و بیماری) همگی دارای مفهوم می‌باشند. البته به دلیل نوع مطالعه باید در تفسیر نتایج احتیاط کرد و به طور کلی در یک مطالعه مقطعی رسیدن به یک فرضیه مهم‌تر از نتیجه آزمون آن است.

اگر مطالعه از نوع مورد شاهدی باشد مفهومش آن است که یک نمونه تصادفی از بین بیماران (m_1) و افراد سالم (m_0) که تا حد امکان از نظر متغیرهای مرتبط با بیماری (به جز عامل مورد مطالعه) مشابه هستند انتخاب شده است. بنابراین تنها می‌توان به محاسبه نسبت افراد مواجهه یافته در این دو گروه اقدام کرد و دو گروه بیمار و سالم را از نظر نسبت مواجهه با عامل خطر با هم مقایسه کرد.

چنانچه مطالعه از نوع هم گروهی و یا مداخله‌ای باشد می‌توان بروز تجمعی بیماری را در دو گروه مواجهه یافته (n_1) و مواجهه نیافته (n_0) محاسبه کرد و دو گروه را از این نظر با هم مقایسه کرد. در جدول ۲×۲ از نوع فوق بروز تجمعی یا خطر برای افراد مواجهه یافته و مواجهه نیافته به ترتیب برابر است با $\frac{a}{n_1}$ و $\frac{b}{n_0}$. نسبت این دو بروز را در اپیدمیولوژی، خطر نسبی می‌نامند که برای جدول ۲×۲ برابر است با :

$$\text{(Relative Risk) } RR = \frac{\frac{a}{n_1}}{\frac{b}{n_0}}$$

براساس روش دلتا خطای معیار برای $\text{Ln}\,\widehat{RR}$ برابر است با :

$$SE(Ln\ \widehat{RR}) = \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{n_1} + \frac{1}{b} - \frac{1}{n_0}}$$

با استفاده از تقریب عامل خطا:

$$EF = e^{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ SE\ (Ln\ \widehat{RR})}$$

حدود اعتماد $1-\alpha$ برای RR عبارتست از:

$$\text{حدود اعتماد } 1-\alpha \text{ برای RR} = \frac{RR}{EF}, RR \times EF$$

در مطالعات مقطعی و مورد شاهدی بدون پذیرفتن مفروضاتی نمی‌توان خطر نسبی را محاسبه کرد. در زیر به شرایط و چگونگی محاسبه خطر نسبی در دو نوع مطالعه فوق اشاره می‌شود.

الف ـ مطالعات مقطعی

در مطالعات مقطعی کسر $\frac{a}{n_1} \div \frac{b}{n_0}$ نسبت بیمار بودن را در گروه دارای مواجهه به گروه بدون مواجهه نشان می‌دهد. در صورتی که طول مدت بیماری برای بیمار گروه مواجهه و بیمار گروه غیر مواجهه یکسان باشد، نسبت بیمار بودن در گروه مواجهه به گروه غیر مواجهه که در مطالعه مقطعی حاصل می‌شود برابر نسبت بیمار شدن در دو گروه مذکور می‌گردد. به عبارت دیگر این نسبت برابر همان خطر نسبی است که در مطالعه هم گروهی بیان شد.

ب ـ مطالعات مورد شاهدی

چنانچه در مطالعات مقطعی علاوه بر یکسان بودن طول مدت بیماری در گروه مواجهه یافته و نیافته بروز بیماری هم نادر باشد خطر نسبی را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$RR = \frac{\frac{a}{a+c}}{\frac{b}{b+d}} \approx \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

حال با توجه به اینکه در یک مطالعه مورد شاهدی می‌توان کسر $\frac{ad}{bc}$ را از تقسیم دو کسر $\frac{a}{b}$ بر $\frac{c}{d}$ (هر دو قابل تخمین می‌باشند) بدست آورد، نتیجه می‌شود که اگر طول مدت بیماری در گروه مواجهه و غیر مواجهه یکسان و نیز بروز بیماری نادر باشد، کسر فوق برآورد ناااریب از خطر نسبی خواهد بود.

در اپیدمیولوژی این کسر را نسبت شانسها و یا نسبت برتری نامیده و با OR[1] نشان می‌دهند.

نکته قابل توجه در مورد این شاخص آن است که مقدار آن بستگی به تقدم و تأخر مواجهه و بیماری ندارد و به عبارت دیگر OR بیماری بر حسب مواجهه و یا مواجهه بر حسب بیماری یکسان است. بحث فوق اهمیت OR را در مطالعات اپیدمیولوژیک نشان می‌دهد لذا در ادامه به بیان خطای OR و حدود اعتماد OR می‌پردازیم.

خطای معیار لگاریتم OR با تقریب برابر است با :

$$SE(Ln\ \mathrm{OR}) = \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}$$

---

1. Odds ratio

که به این ترتیب برآورد فاصله‌ای برای OR عبارت است از:

$$\text{برآورد فاصله ای } (1-\alpha) \text{ برای OR} = e^{Ln\,OR \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} SE\,(Ln\,OR)}$$

مشابه فصل قبل می‌توان کمیت $e^{z_{1-\frac{\alpha}{2}} SE\,(Ln\,OR)}$ را بـه عنـوان عامـل‌خطـای OR درنظـر گرفت و برآورد فاصله‌ای را به صورت زیر نیز نشان داد:

$$\text{برآورد فاصله‌ای } (1-\alpha) \text{ برای OR} = \frac{OR}{EF} \text{ و } OR \times EF$$

مثال: چنانچه اطلاعات زیر مربوط به مطالعه‌ای برای تعیین شـیوع بیمـاری آسـم باشـد آزمـون مساوی بودن برتری بیماری در مردان و زنان به شرح زیر خواهد بود.

	آسم دارد	آسم ندارد	جمع	برتری
زن	۸۱(a)	۹۹۵(b)	۱۰۷۶	۸۱/۹۹۵=۰/۰۸۱٤
مرد	۵۷ (c)	۸٦۷ (d)	۹۲٤	۵۷/۸٦۷ =۰/۰٦۵۷
کل	۱۳۸	۱۸٦۲	۲۰۰۰	(نسبت برتری) $OR = \frac{۰/۰۸۱٤}{۰/۰٦۵۷} = ۱/۲۳۸$

که در این مثال خطای تقریبی لگاریتم OR برابر است با:

$$SE(Ln\,OR) = \sqrt{\frac{1}{81} + \frac{1}{995} + \frac{1}{57} + \frac{1}{867}} = 0/179$$

و به این ترتیب :

$$EF = e^{1/96 \times 0/179} = 1/42$$

و برآورد فاصله‌ای OR برابر است با :

$$\text{برآورد فاصله‌ای ۹۵ درصد OR} = \frac{1/238}{1/42} \text{ و } 1/238 \times 1/42$$

و بدین ترتیب فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای OR برابر با (۱/۷٦و ۰/۸۷) خواهد بود.

در مطالعات اپیدمیولوژیک برای مقایسه دو نسبت، مساوی بودن نمونه‌هـا در دو گـروه موجـب افزایش کارایی یا توان آزمون می‌شود. در مطالعه مقطعی به دلیل اینکه تقسیم نمونه به دو گروه چـه

از نظر بیمار و غیربیمار یا مواجهه یا غیرمواجهه در کنترل محقق نمی‌باشد، تساوی نمونه‌ها در دو گروه اتفاق نمی‌افتد. لیکن در مطالعات مورد- شاهدی و همگروهی چون انتخاب نمونه در اختیار محقق است تساوی نمونه‌ها در دو گروه امکان‌پذیر است لذا هر دو این مطالعات توان بالاتری نسبت به مطالعهٔ مقطعی دارند. ولی در انتخاب بین مطالعه مورد- شاهدی و همگروهی در مواردی که بیماری نادر است مطالعه مورد- شاهدی و در مواردی که مواجهه نادر باشد مطالعهٔ همگروهی توصیه می‌شود.

۱۰-۳. روش حذف اثر متغیر مخدوش کننده و برآورد یک کاسه شده از خطر نسبی

یکی از مباحث بسیار مهم در مطالعات اپیدمیولوژیک به خصوص مشاهده ای حذف اثر عامل یا عوامل مخدوش کننده در بررسی رابطه عامل خطر با بیماری می‌باشد. عامل مخدوش کننده عاملی است که با هر دو متغیر عامل خطر و بیماری در ارتباط باشد و در نتیجه ممکن است به دلیل حضور نامتعادل این عامل در سطوح مختلف عامل خطر رابطه بین عامل خطر و بیماری کمتر و یا بیشتر از مقدار واقعی جلوه کند و این رابطه را خدشه‌دار سازد. مثلاً در مطالعه رابطه سیگار و انفارکتوس میوکارد اگر سن با سیگار و انفارکتوس میوکارد در ارتباط باشد به عنوان عامل مخدوش کننده مطرح می‌گردد و می‌توان مثلاً چنین استنباط کرد که علت افزایش احتمال انفارکتوس میوکارد در کسانی که سیگار می‌کشند تا اندازه‌ای مربوط به بالاتر بودن میانگین سن در سیگاریها نسبت به غیر سیگاری ها است و در واقع بالا بودن سن در سیگاریها موجب افزایش خطر انفارکتوس میوکارد شده است و در نتیجه ارتباط مشاهده شده تا اندازه‌ای بیشتر از واقعیت است.

برای حذف اثر متغیر مخدوش کننده راههای متفاوت وجود دارد که در زیر به آنها اشاره می‌شود.

۱. محدود کردن[1] مطالعه به زیر گروهی از عامل مخدوش کننده مثلاً مطالعه رابطه سیگار و انفارکتوس میوکارد تنها در افراد مسن.
۲. جور کردن فرد به فرد[2] افراد مورد مطالعه در گروه مورد و شاهد از نظر وضعیت متغیر و یا متغیرهای مخدوش کننده. در این صورت برای انجام آزمون دو نسبت مواجهه یافته در گروه مورد و شاهد از تست مک نمار استفاده می‌شود.
۳. استفاده از رگرسیون خطی چندگانه و لوژستیک چندگانه.

1. Restriction
2. Individual matching

٤. محاسبه نسبت برتری (خطر نسبی) در زیرگروه‌های عامل مخدوش کننده و برآورد نسبت برتری یک کاسه شده. این روش از این نظر که در بسیاری از مطالعات اپیدمیولوژیک لازم می‌گردد نسبت برتری محاسبه شده برای زیرگروه‌ها به صورت یک کاسه بیان شود، از اهمیت خاص برخوردار است مثلاً مقدار ملاک برای مناطق، زمانها و یا زیرگروه‌های مختلف سنی محاسبه شود و آنگاه اندازه یک کاسه آنها مورد توجه قرار گیرد. یکی از متداولترین این روشها روش مانتل هنزل است که در زیر بدان اشاره می‌شود.

فرض کنیم در گروه i ام فراوانیها در جدول ۲×۲ به صورت زیر باشد.

	خطر +	خطر −	
+	a_i	b_i	
−	c_i	d_i	
			n_i

در این صورت برآورد یک کاسه برای OR و یا تقریبا RR برابر است با :

$$OR_{MH} = \frac{Q}{R}$$

که در این رابطه $Q = \sum \frac{a_i d_i}{n_i}$ و $R = \sum \frac{b_i c_i}{n_i}$ خواهد بود. ساده‌ترین فرمول برای محاسبه واریانس $\text{Ln } OR_{MH}$ عبارت است از:

$$Var(Ln\ OR_{MH}) = \frac{V}{Q \times R}$$

و V براساس علائم به کار برده شده در جدول ۹ – ۹ برابر جمع V_i ها و به عبارت دیگر:

$$V = \sum \frac{n_{i1} n_{i2} c_{i1} c_{i2}}{n_i^2 (n_i - 1)}$$

که در این صورت برآورد فاصله ای OR_{MH} برابر خواهد شد با :

$$e^{Ln\, OR_{MH} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} S.E(Ln\ OR_{MH})}$$

و یا

$$\frac{OR_{MH}}{EF}, OR_{MH} \times EF$$

که در آن فاکتور خطا برابر $e^{z_{1-\frac{\alpha}{2}} S.E(Ln\, OR_{MH})}$ می‌باشد.

برای اطلاعات جدول ۹-۷ محاسبه این ملاک مشترک و فاصله اطمینان ۹۵ درصد آن به

صورت زیر خواهد بود:

$$Q=\frac{٤٦\times ١٨٤٥}{٣٨٨٢}+\frac{٦\times ٨٨٢}{١٥٤٨}+\frac{١٤\times ٤٥٢}{٩٣٩}=٣٢/٠٢$$

$$R=\frac{١٩٦٢\times ٢٩}{٣٨٨٢}+\frac{٦٥٧\times ٣}{١٥٤٨}+\frac{٤٦٤\times ٩}{٩٣٩}=٢٠/٣٨$$

مقدار V نیز براساس جدول ۹-۹ برابر است با ۲۶/۱۷ بنابراین:

$$OR_{MH}=\frac{٣٢/٠٢}{٢٠/٣٨}=١/٥٧$$

$$SE(LnOR_{MH})=\sqrt{\frac{٢٦/١٧}{٣٢/٠٢\times ٢٠/٣٨}}=٠/٢$$

$$EF=e^{١/٩٦\times ٠/٢}=١/٤٨$$

برآورد فاصله‌ای ۹۵ درصد برای OR MH $=\frac{١/٥٧}{١/٤٨}$ و $١/٥٧\times ١/٤٨$

$=(١/٠٦$ و $٢/٣٢)$

بدین ترتیب حدود اعتماد فوق مقدار یک را شامل نمی‌شود یعنی (می‌توان مساوی بودن نسبت برتری یک کاسه شده را با یک رد کرد) و نتیجه گرفت که نسبت بیماری در مرد و زن یکسان نیست و همانطور که از اطلاعات مربوط به درصد بیماری در مرد و زن مشاهده می‌شود نسبت بیماری در مردان از زنان بیشتر است. این نتیجه براساس آزمون معنی‌دار بودن اختلاف میزان‌ها (تطبیق شده) براساس محاسبات جدول ۹-۹ نیز قبلاً حاصل شده بود.

اگر نمونه مورد بررسی نتیجه مشاهدات دوتایی برای صفت کیفی مانند آنچه در قسمت ۶-۱۲ برای یک مطالعهٔ مورد-شاهدی بیان شده باشد، در این صورت برآورد OR مشترک (یعنی OR بیماری برای مواجهه به غیرمواجهه) عبارتست از :

$$OR=b/c$$

که b تعداد زوج هایی است که بیمار مواجهه داشته و کنترل مواجهه ندارد و c تعداد زوج هایی است که بیمار مواجهه نداشته و کنترل مواجهه دارد.

به روش دلتا خطای معیار $Ln\,OR$ محاسبه شده عبارتست از :

$$S.E(Ln\,OR)=\sqrt{\frac{١}{b}+\frac{١}{c}}$$

با استفاده از مشاهدات جدول ۶-۳ برآورد OR مشترک عبارتست از :

$$OR=\frac{٢٣}{٨}=٢/٨٧٥$$

و فاکتور خطا (EF) برابر است با:

$$EF = e^{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} S.E(LnOR)} = e^{۱/۹۶\times\sqrt{\frac{۱}{۲۳}+\frac{۱}{۸}}} = ۲/۲۳۶$$

و بدین ترتیب حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR عبارتست از :

$$\text{حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR} = \frac{\text{OR}}{\text{EF}} \quad \text{و} \quad \text{OR}\times EF$$

$$= \frac{۲/۸۷۵}{۲/۲۳۶} \quad \text{و} \quad ۲/۸۷۵ \times ۲/۲۳۶$$

و بدین ترتیب فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای OR مشترک برابر (۶/۴۲ و ۱/۲۸) خواهد بود.

بکارگیری روش طبقه‌بندی سبب حذف اثر مخدوش‌کنندگی در اندازه‌گیری شاخص OR یا هر شاخص دیگر تعیین کننده رابطهٔ مواجهه و بیماری می‌شود. از طرف دیگر این طبقه‌بندی باعث افزایش خطای معیار برآوردکنندهٔ مورد نظر (مثلاً OR_{MH}) می‌شود. در عمل قبول کمی مخدوش-کنندگی یا اریبی به ازاء کاهش قابل توجهی در خطای معیار توصیه می‌شود. به عنوان یک دستورالعمل تجربی اگر اختلاف OR_{MH}، OR_{crude} کمتر از ۱۰ درصد مقدار OR_{MH} باشد استفاده از طبقه‌بندی توصیه نمی‌شود.

۱۰-۴. آنالیز لوژستیک

در فصل هشتم آنالیز رگرسیون که یکی از روشهای بررسی بستگی بین صفات است بیان گردید لیکن در آن فصل از آنالیز رگرسیون برای مطالعه بستگی یا ارتباط بین یک صفت کمی به نام متغیر وابسته و یک یا چند صفت دیگر به نام متغیر مستقل استفاده شد. در پژوهش‌های علوم پزشکی به طور عمده محقق با متغیرهای کیفی از قبیل بیمار، سالم و یا بهبود یافته و بهبود نیافته سروکار دارد و مایل است ارتباط این متغیر را به عنوان متغیر وابسته با یک یا چند متغیر مستقل که از نوع اسمی، رتبه‌ای، کمی پیوسته و یا کمی ناپیوسته است بررسی کند. استفاده از رگرسیون لوژستیک این امکان را برای محقق فراهم می‌سازد.

نام لوژستیک از کلمه لوژیت که در واقع نوعی تغییر متغیر به شرح زیر است گرفته شده است.

$$\log it\,(p) = \log \frac{p}{۱-p}$$

به عبارت دیگر لوژیت یک احتمال یا ریسک برابر است با لگاریتم کسری که صورت آن احتمال وقوع حادثه و مخرج آن احتمال عدم وقوع حادثه می‌باشد.

تبدیل p به $\log\frac{p}{1-p}$ موجب می‌شود تا میدان تغییرات p که از صفر تا یک است به $-\infty$ تا $+\infty$ تبدیل شود. در این صورت رابطه لوژیت p برای متغیر وابسته y که یک متغیر اسمی دو حالته است با سایر متغیرهای مستقل x که می‌توانند هر نوع متغیری باشند به صورت کلی زیر نوشته می‌شود که به آن رگرسیون لوژستیک می‌گویند.

$$\log\frac{p}{1-p} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k$$

در رابطه فوق β_0 عبارت است از logit (p) وقتی همه x_i ها برابر صفر باشند و β_i تغییر مقدار لوژیت را به ازاء یک واحد تغییر در x_i نشان می‌دهد و به عبارت دیگر e^{β_i} نشان دهنده مقدار OR برای افزایش یک واحد x_i می‌باشد. اگر x_i دو حالته و به صورت ۰ و ۱ نشان داده شده باشد در این صورت e^{β_i} مقدار OR برای تغییر این متغیر از حالت صفر به یک را نشان می‌دهد. چنانچه متغیر x از نوع کمی باشد اندازه اصلی و هنگامی که این متغیر رتبه ای باشد معمولاً مقدار عددی رتبه در محاسبات منظور می گردد. هنگامی که متغیر x از نوع اسمی ولی مثلا سه حالته باشد دو متغیر به نام متغیر ظاهری[1] در رگرسیون منظور می‌شود و سه حالت مورد نظر به شرح زیر در معادله رگرسیون تعریف می‌گردد.

حالت	x_i	x_{i+1}
۱	۰	۰
۲	۱	۰
۳	۰	۱

به همین ترتیب چنانچه متغیر مورد مطالعه مثلا ٤ حالت داشته باشد سه متغیر ظاهری منظور خواهد شد به شرح زیر:

حالت	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
۱	۰	۰	۰
۲	۱	۰	۰
۳	۰	۱	۰
٤	۰	۰	۱

در تحلیل آنالیز رگرسیون لوژستیک ضرایب β حائز اهمیت می‌باشند. چنانچه حدود اعتماد آنتی لگاریتم ضریب یکی از x ها یک را شامل شود مفهومش این است که OR یا نسبت برتری y نسبت به این متغیر را می‌توان یک فرض کرد و در نتیجه نمی توان گفت رابطه بین دو متغیر x و y وجود دارد. اما اگر هر دو حد اعتماد بیش از یک و یا کمتر از یک باشد مفهومش آن است که بین دو متغیر x و y ارتباط وجود دارد.

1. Dummy variable

تابع درستنمایی[1]

در رگرسیون خطی معمولاً پارامترها به روش حداقل مربعات خطا محاسبه می‌شود ولی در رگرسیون لوژستیک این روش مناسب نمی‌باشد و معمولاً از روش دیگری به نام برآورد ماکزیمم درستنمایی استفاده می‌شود. پیش از اینکه به برآورد پارامترها اشاره کنیم با ارائه یک مثال به بیان مفهوم تابع درستنمایی می‌پردازیم.

در یک نمونه ۱۰۰ تایی از زایمان‌های یک منطقه ملاحظه شد که ۳۵ مادر از مراقبت‌های کامل دوران بارداری استفاده کرده‌اند. اگر احتمال واقعی مراقبت کامل دوران بارداری در این جامعه p باشد احتمال اینکه در یک نمونه ۱۰۰ تایی، ۳۵ مورد مشاهده شود براساس فرمول ۳-۱۴ عبارت است از :

$$P(x=۳۵)=\frac{۱۰۰!}{۳۵!\,۶۵!}p^{۳۵}(۱-p)^{۶۵}$$

که این احتمال را درستنمایی حادثه مورد نظر نیز می‌نامیم. اندازه این درستنمایی یا احتمال تابع مقدار p می‌باشد. اگر p=۰ یا p=۱ باشد احتمال یا درستنمایی فوق صفر است. وقتی p از صفر به یک تغییر کند ابتدا این درستنمایی افزایش یافته و در نقطه‌ای به ماکزیمم خود رسیده و سپس کاهش می‌یابد.

مقداری از p که به ازای آن درستنمایی فوق ماکزیمم می‌شود را برآورد ماکزیمم یا حداکثر درستنمایی می‌نامیم. با این روش مقدار $\hat{p}$ = ۰/۳۵ برآورد می‌شود.

همانگونه که در مثال فوق با روش ماکزیمم درستنمایی مقدار پارامتر p برآورد شد می‌توان این روش را تعمیم داد و از آن برای برآورد ضرایب رگرسیون لوژستیک استفاده کرد.

از آنجایی که تابع درستنمایی و لگاریتم آن هر دو در یک نقطه ماکزیمم می‌شوند و ماکزیمم کردن لگاریتم تابع درستنمایی ساده‌تر است، در عمل به جای استفاده از تابع درستنمایی از لگاریتم آن استفاده می‌شود.

اولین خاصیت برآورد به روش ماکزیمم درستنمایی آن است که تحت شرایطی بسیار کلی این برآوردها با بزرگ شدن حجم نمونه به توزیع نرمال نزدیک می‌شوند که تخمینی از واریانس آنها نیز با استفاده از تابع لگاریتم درستنمایی امکان پذیر می‌گردد و در نتیجه امکان آزمون فرضیه مثلاً صفر بودن هر یک از پارامترهای مدل مقدور می‌گردد.

دومین خاصیت مهم تابع لگاریتم درستنمایی آن است که به وسیله این روش می‌توان بیشتر از یک پارامتر و یا زیرگروهی از پارامترها را به طور همزمان آزمون کرد.

1. Likelihood function

اگر به عنوان مثال در یک رگرسیون لوژستیک چند متغیره بخواهیم ارتباط سکته قلبی و متغیرهای استعمال دخانیات، BMI، فشار خون سیستولیک و دیاستولیک را با ثابت نگه داشتن متغیرهای سن، جنس و تحصیلات به طور همزمان آزمون کنیم می‌توان از روش ماکزیمم درستنمایی به صورت زیر استفاده کرد.

ملاک آزمون به این صورت بدست می‌آید که لگاریتم تابع درستنمایی را یکبار براساس هر هفت متغیر ماکزیمم کرده و بار دیگر براساس سه متغیر باقیمانده سن، جنس و تحصیلات (با حذف اثر متغیرهای استعمال دخانیات،BMI، فشار خون سیستولیک و دیاستولیک) ماکزیمم می‌کنیم. در صورت صحیح بودن فرضیه .H (مستقل بودن سکته قلبی از استعمال دخانیات،BMI، فشار خون سیستولیک و دیاستولیک به شرط ثابت بودن سایر متغیرهای ذکر شده) دو برابر قدر مطلق اختلاف این لگاریتم درستنمایی‌ها در صورت بزرگ بودن حجم نمونه دارای توزیع کای دو با چهار درجه آزادی یعنی تعداد متغیرهای حذف شده می‌باشد. درست نبودن فرضیه .H در جهت بزرگ شدن این ملاک اثر می‌کند. بنابراین مشابه آزمونهای قبل، بزرگ بودن ملاک آزمون منجر به رد فرضیه .H می‌شود.

مثال: در مطالعه عوامل موثر بر درد پشت و کمر، اثر عوامل خطر سن، جنس، شاخص جرم بدن، اشتغال به کار سخت، منطقه زندگی (شهر، روستا)، تحصیلات (باسواد، بی‌سواد)، وضعیت تأهل (مجرد، متأهل)، اختلالات روانی (دارد، ندارد)، و استعمال دخانیات مورد بررسی قرار گرفت. در آنالیز اطلاعات یک رگرسیون لوژستیک چند متغیره متشکل از متغیرهای فوق برازش داده شد که نتایج این برازش در جدول (۱۰-۱) نشان داده شده است.

جدول ۱۰-۱. نتایج برازش مدل رگرسیون لوژستیک با نه متغیر مندرج در جدول

عامل خطر	ضریب	خطای معیار	آماره والد[1]	p-value
سن	۰/۰۲	۰/۰۰۳	٦/٢٠	۰/۰۰۰
جنسیت	۰/۹۷	۰/۰۸۵	۱۱/٤٦	۰/۰۰۰
شاخص جرم بدن	۰/۰۳	۰/۰۰۷	٤/٤٣	۰/۰۰۰
اشتغال به کار سخت	-۰/۰۱	۰/۱٥٦	-۰/۰۷	**۰/۹٤۷**
منطقه زندگی	۰/۰۲	۰/۱۳۱	۰/۱٤	**۰/۸۸٦**
تحصیلات	-۰/۱٥	۰/۱۰۰	-۱/٥۰	**۰/۱۳۳**
وضعیت تاهل	۰/۸۸	۰/۱۱۳	۷/۸٤	۰/۰۰۰
اختلالات روانی	۰/٦۹	۰/۰۷٥	۹/۲۹	۰/۰۰۰
استعمال دخانیات	۰/۳۷	۰/۱۰٦	۳/٤۸	۰/۰۰۱

1. Wald statistic

همانطور که در جدول مشاهده می‌کنیم اثر متغیرهای اشتغال به کار سخت، منطقه زندگی و تحصیلات اختلاف معنی‌داری در ابتلا به درد پشت و کمر نشان نمی‌دهند. بزرگترین مقدار p متعلق به اشتغال به کار سخت می‌باشد (p-value = ۰/۹۴۷). با توجه به اینکه سادگی مدل یکی از ملاحظات مهم در مدلسازیهای رگرسیونی می‌باشد، متغیر اشتغال به کار سخت را از مدل رگرسیونی حذف کرده و مدل را دوباره برازش می‌دهیم. (جدول ۱۰-۲)

جدول ۱۰-۲. نتایج برازش مدل رگرسیون لوژستیک با هشت متغیر مندرج در جدول

عامل خطر	ضریب	خطای معیار	آماره والد	p-value
سن	۰/۰۲	۰/۰۰۳	۶/۲۳	۰/۰۰۰
جنسیت	۰/۹۸	۰/۰۸۱	۱۱/۹۹	۰/۰۰۰
شاخص جرم بدن	۰/۰۳	۰/۰۰۷	۴/۴۳	۰/۰۰۰
منطقه زندگی	۰/۰۲	۰/۱۳۱	۰/۱۴	**۰/۸۹۱**
تحصیلات	-۰/۱۵	۰/۱۰۰	-۱/۵۰	**۰/۱۳۳**
وضعیت تاهل	۰/۸۸	۰/۱۱۳	۷/۸۴	۰/۰۰۰
اختلالات روانی	۰/۶۹	۰/۰۷۵	۹/۳۰	۰/۰۰۰
استعمال دخانیات	۰/۳۷	۰/۱۰۶	۳/۴۸	۰/۰۰۱

با حذف متغیر اشتغال به کار سخت باز هم ابتلا به درد پشت و کمر ارتباط معنی‌داری با متغیرهای منطقه زندگی و تحصیلات نشان نمی‌دهد. بنابراین در مرحله بعد متغیر منطقه زندگی که دارای مقدار p بزرگتر (p-value = ۰/۸۹۱) است را حذف می‌کنیم. جدول ۱۰-۳ نتایج برازش مدل پس از حذف متغیر منطقه زندگی را نشان می‌دهد.

جدول ۱۰-۳. نتایج برازش مدل رگرسیون لوژستیک با هفت متغیر مندرج در جدول

عامل خطر	ضریب	خطای معیار	آماره والد	p-value
سن	۰/۰۲	۰/۰۰۳	۶/۲۳	۰/۰۰۰
جنسیت	۰/۹۸	۰/۰۸۱	۱۲/۰۰	۰/۰۰۰
شاخص جرم بدن	۰/۰۳	۰/۰۰۷	۴/۴۳	۰/۰۰۰
تحصیلات	-۰/۱۵	۰/۰۹۹	-۱/۵۳	**۰/۱۲۶**
وضعیت تاهل	۰/۸۸	۰/۱۱۳	۷/۸۵	۰/۰۰۰
اختلالات روانی	۰/۶۹	۰/۰۷۵	۹/۳۰	۰/۰۰۰
استعمال دخانیات	۰/۳۷	۰/۱۰۶	۳/۴۸	۰/۰۰۱

در مرحله سوم متغیر تحصیلات را نیز حذف می‌کنیم و مجدداً مدل را برازش می‌دهیم (جدول ۱۰-۴) در این حالت تمام متغیرهای باقیمانده معنی‌دار هستند. این روش نوعی از روش انتخاب

متغیرها در مدل رگرسیونی می‌باشد که به آن روش پسرو[1] می‌گوییم. روشهای کاملتری نیز برای انتخاب متغیرها در مدل رگرسیونی نظیر پسروگام به گام[2] و پیشروگام به گام[3] وجود دارد که در نرم افزارهای آماری موجود می‌باشند.

جدول۱۰-٤. نتایج برازش مدل رگرسیون لوژستیک با شش متغیر مندرج در جدول

عامل خطر	ضریب	خطای معیار	آماره والد	p-value
سن	۰/۰۲	۰/۰۰۲	۸/۰٤	۰/۰۰۰
جنسیت	۱/۰۰	۰/۰۸۰	۱۲/٤۸	۰/۰۰۰
شاخص جرم بدن	۰/۰۳	۰/۰۰۷	٤/۳۷	۰/۰۰۰
وضعیت تاهل	۰/۸۷	۰/۱۱۲	۷/۷۵	۰/۰۰۰
اختلالات روانی	۰/۷۰	۰/۰۷۵	۹/۳٤	۰/۰۰۰
استعمال دخانیات	۰/۳۷	۰/۱۰٦	۳/٤۸	۰/۰۰۰

در عمل اگر بخواهیم معنی‌داری هر سه متغیر را به طور همزمان بررسی کنیم می‌بایست از آزمون نسبت درستنمایی استفاده کنیم. بدین ترتیب یکبار مدل با حضور هر نه متغیر و بار دیگر مدل با حضور شش متغیر باقیمانده (با حذف متغیرهای اشتغال به کار سخت، محل زندگی و تحصیلات) را برازش می‌دهیم. در این مثال مقدار لگاریتم درستنمایی برای مدل کامل برابر ۲۸۹۳/۸٦- و برای مدل کاهش یافته ۲۸۹۵/۰٤- می‌باشد. بنابراین آماره آزمون نسبت درستنمایی به صورت زیر می‌باشد.

$$\chi^2 = ۲ \times ((-۲۸۹۳/۸٦) - (-۲۸۹۵/۰٤)) = ۲/۳۵$$

با مقایسه ملاک آزمون با مقدار بحرانی توزیع χ^2 با سه درجه آزادی (اختلاف پارامترهای دو مدل) مقدار p برابر ۰/۵۰ بدست می‌آید. بنابراین مدل کاهش یافته اختلاف معنی‌داری با مدل کامل ندارد و به منظور سادگی از مدل کاهش یافته استفاده می‌کنیم.

در این مثال برای سن ۰/۰۲ = β و خطای معیار آن ۰/۰۰۲ است که برای مقایسه اختلاف آن با صفر داریم:

$$z = \frac{۰/۰۲ - ۰}{۰/۰۰۲} = ۱۰$$

1. Backward
2. Backward-stepwise
3. Forward-stepwise

با مقایسه این عدد با توزیع نرمال استاندارد ملاحظه می‌شود که اختلاف β با صفر همانطور که در جدول آمده در سطح اطمینان کمتر از ۰/۰۰۱ معنی‌دار شده است. برای $\beta =$ ۰/۰۲ مقدار برتری به ازای افزایش یکسال سن برابر است با $OR = e^{0/02} = 1/02$ و برای ۱۰ سال افزایش سن $OR = e^{10 \times 0/02} = 1/22$. در جدول ۱۰-٤ علاوه بر محاسبه مقدار ضریب و خطای معیار آن مقدار p برای آزمون صفر بودن ضریب نیز داده شده است. همچنین براساس این نتایج می‌توان حدود اعتماد β و در نتیجه حدود اعتماد OR مربوطه را نیز محاسبه کرد مثلاً حدود اعتماد OR برای افزایش یکسال سن به صورت زیر می‌باشد:

$$EF = e^{1/96 \times 0/002} = 1/004$$

حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR $= \frac{1/02}{1/004}$ و $1/02 \times 1/004$

بدین ترتیب حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR برابر با (۱/۰۲٤ و ۱/۰۱٦) خواهد بود.

۱۰-۵. تحلیل مطالعات همگروهی (تحلیل بقاء)[1]

در این بحث به تحلیل بقاء که کاربرد گسترده در مطالعات همگروهی دارد اشاره خواهد شد. در قسمت اول این بحث روش جدول عمر[2] بیان می‌شود. منتها جدول عمر دو کاربرد دارد یکی کاربردی است که توسط جمعیت شناسان برای محاسبه امید زندگی می‌باشد که به آن جدول عمر جاری[3] می‌گویند. دیگری کاربردی است که برای محاسبه بقاء در مطالعات همگروهی انجام می‌شود و به آن جدول عمر همگروهی[4] گویند.

در قسمت دوم روش کاپلان مایر[5] برای تعیین تابع بقاء که معمولاً در مطالعات با حجم نمونه کم کاربرد دارد ارائه می‌شود و در قسمت سوم به ارائه روش لگ رنک[6] برای مقایسه دو تابع بقاء مبادرت می‌شود.

1. Survival analysis
2. Life table
3. Current life table
4. Cohort life table
5. Kaplan- Meier
6. Log - rank

۱۰-۵-۱. جدول عمر

۱۰-۵-۱-۱. جدول عمر جاری

برای تهیه جدول عمر، گروهی از اشخاص فرضی را (۱۰۰۰ یا ۱۰۰۰۰ یا ۱۰۰۰۰۰ نفر) که در یک زمان متولد شده باشند در نظر گرفته، آنها را تحت تاثیر میزانهای مرگ اختصاصی سنی موجود قرار می‌دهیم و روند مرگ آنها را مطالعه می‌کنیم. جدول عمر را می‌توان برحسب جنس، نژاد، مناطق مختلف کشور، حرفه، بیماریها و غیره تهیه نمود. در محاسبات جدول عمر برخلاف محاسبه میزانها که بر مبنای جمعیت وسط سال تعیین می‌شوند، جمعیت را در آغاز سال سنی باید بحساب آورد. به عبارت دیگر منظور آن است که به طور مثال از a زن روستایی که به سن ۲۰ سالگی رسیده‌اند، چند نفر آنها مثلا تا x سال دیگر زنده خواهند ماند.

جدول عمر را می‌توان با استفاده از اطلاعات سرشماری و ثبت وقایع مرگ تهیه نمود. برای اجتناب از اشتباهات ناشی از نوسانات سالانه، معمولاً جدول عمر برای سال سرشماری نفوس، براساس میانگین میزانهای اختصاصی سنی سه ساله یعنی سال قبل از سرشماری، سال سرشماری و سال بعد از سرشماری ساخته می‌شود.

برای تهیه جدول عمر، رقمی که در دسترس آمارشناس قرار می‌گیرد، میزان مرگ اختصاصی سنی (m_x) می‌باشد. این میزان عبارت است از نسبت تعداد مرگهای رخ داده در X سالگی به جمعیت X ساله در وسط سال. با در دست داشتن این میزان می‌توان q_x که عبارت است از «احتمال مرگ در طول سال X ام در صورتیکه فرد تا آغاز این سن زنده باشد» را محاسبه کرد. رابطه q_x بر حسب m_x عبارت است از:

$$q_x = \frac{۲m_x}{۲ + m_x}$$

فرض کنیم تعداد اشخاصی که سن آنها در گروه سنی ۲۲ سال است در وسط سال، ۱۵۰۰ نفر و در طی سال ۱۲ مورد مرگ در گروه سنی ۲۲ ساله رخ داده باشد. مطابق تعریف میزان مرگ سنی این گروه برابر خواهد بود با:

$$m_{۲۲} = \frac{D_x}{P_x} \times ۱۰۰۰$$

$$= \frac{۱۲}{۱۵۰۰} \times ۱۰۰۰ = ۸$$ در هزار

یا

$= ۰/۰۰۸$ برحسب نفر

ولی به قسمی که می‌دانیم ۱۵۰۰ نفری که در وسط سال شمارش یا برآورد شده‌اند، تعـداد آنهـا در شروع سال با رقم فوق اختلاف داشته است. چون عده‌ای از آنها تا وسط سال مرده‌اند. مـی‌تـوان فرض نمود که از این ۱۲ مورد مرگ ٦ مـرگ در نیمـه اول و ٦ مـرگ در نیمـه دوم سـال رخ داده است، پس تعداد این گروه در اول سال برابر می‌شود با:

$$۱۵۰۰ + ٦ = ۱۵۰٦$$

با این استدلال، احتمال مرگ در شروع گروه سنی برابر می‌شود با :

$$q_{۲۲} = \frac{۱۲}{۱۵۰۰ + \frac{۱۲}{۲}}$$

یا به طور کلی:

$$q_x = \frac{D_x}{P_x + \frac{D_x}{۲}}$$

و چون

$$m_x = \frac{D_x}{P_x}$$

پس

$$D_x = P_x\, m_x$$

در نتیجه فرمول

$$q_x = \frac{D_x}{P_x + \frac{D_x}{۲}}$$

را می‌توان تبدیل نمود به:

$$q_x = \frac{P_x m_x}{P_x + \frac{۱}{۲} P_x m_x}$$

با حذف P_x از صورت و مخرج کسر، خواهیم داشت:

$$q_x = \frac{m_x}{۱ + \frac{۱}{۲} m_x}$$

صورت و مخرج کسر را در ۲ ضرب نموده، فرمول زیر بدست می‌آید:

$$q_x = \frac{2m_x}{2+m_x} \qquad (12\text{-}10)$$

در تهیه جدول عمر نکته‌ای که لازم است مراعات شود، مرگ سال اول زندگی است. بخوبی می‌دانیم که کودکان کمتر از یکسال بیشتر در ماه‌های اول زندگی می‌میرند. بنابراین اطفالی که قبل از یکساله شدن مرده‌اند، به طور متوسط کمتر از نصف سال زنده بوده‌اند. در صورتی که در سایر سنین می‌توان فرض نمود که این مدت ٦ ماه باشد.

پس از بدست آوردن q_x می‌توان جدول عمر را تشکیل داد. اساس ساخت جدول عمر بدین قرار است که فرض می‌شود مثلا یکصد هزار نوزاد در یک زمان متولد می‌شوند. این کودکان تحت شرایط موجود پس از گذشت زمانهای مختلف چند نفرشان زنده می‌مانند.

در جدول عمر ستونهای مختلفی وجود دارد که به ترتیب عبارتند از:

ستون ۱ – X ، گروه سنی

ستون ۲ – m_x ، میزان مرگ سنی برای یک نفر

ستون ۳ – q_x ، احتمال مرگ در طول سال X ام در صورتی که فرد تا آغاز این سن زنده باشد.

ستون ٤ – p_x ، احتمال بقاء در طول سال X ام در صورتی که فرد تا آغاز این سن زنده باشد.

ستون ۵ – l_x ، تعداد بازماندگان در شروع سن X.

ستون ٦ – L_x ، جمع تعداد سالهایی که l_x فرد بازمانده، در طول سال X ام عمر می‌کنند

ستون ۷ – T_x ، جمع تعداد سالهایی که l_x فرد بازمانده عمر می‌کنند.

ستون ۸ – e_x ، امید زندگی یا تعداد سالهایی که به طور متوسط l_x فرد بازمانده، عمر می‌کنند.

ستونهای فوق در جداول عمر تک سنی، مورد استفاده است. معمولا در بررسی‌های بهداشتی و جمعیتی جدول عمر خلاصه شده،[1] مورد استفاده می‌باشد، که در آن گروه اول X تک سنی، گروه بعدی $X_{1\text{-}4}$ چهار ساله و بقیه گروه‌ها ۵ ساله می‌باشند. در جدول مختصر فرض بر این است که گذشتگان هرگروه سنی نصف مدت طول آن گروه، عمر کرده‌اند.

در این گونه موارد ستونها عبارتند از ${}_nm_x$ ، ${}_nq_x$ ، ${}_np_x$ ، l_x ، ${}_nL_x$ ، T_x و e_x که x شروع و n طول گروه سنی می‌باشد.

1. Abridged life table

محاسبه این ستونها به قرار زیر انجام می‌گیرد:

$$ {}_nq_x = \frac{2n \times {}_nm_x}{2 + n \times {}_nm_x} $$

در این فرمول بجز دو گروه اول، n مساوی ۵ می باشد در گروه ٤ – ۱ ساله ، n مساوی ٤ و در گروه اول، n مساوی یک است.

${}_np_x$ برابر است با ${}_nq_x - 1$

l_{x+n} از $l_x \cdot {}_np_x$ بدست می‌آید:

$$ l_{x+n} = l_x \cdot {}_np_x $$

${}_nL_x$ از رابطه $\frac{n(l_x + l_{x+n})}{2}$ محاسبه می‌شود.

T_x عبارت است از حاصل جمع ${}_nL_x$ ها، از گروه سنی x تا آخر جدول.

و بالاخره امید زندگی عبارت است از:

$$ e_x = \frac{T_x}{l_x} $$

باید متذکر شد که محاسبه ${}_nL_x$به روش فوق، برای دو گروه سنی اول دقیق نمی‌باشد و بهتر است برای این دو گروه از روش‌های دقیقتر، از جمله بکار بردن n های کوچکتر مثلاً یکماه، استفاده کرده و با جمع آنها ${}_nL_x$مورد نظر را دقیق‌تر محاسبه کرد.

در مواقعی که در جدول عمر، اطلاعات دو گروه اول به صورت ماهیانه در اختیار نباشد می توان مقادیر ${}_1L_0$ و ${}_4L_1$ را با تقریب قابل قبولی از فرمولهای

$$ {}_1L_0 = 0/3l_0 + 0/7l_1 $$

$$ {}_4L_1 = 1/35l_1 + 2/65l_5 $$

بدست آورد. به علاوه امید به زندگی در جداول طول عمر مختصر شده، برای سن هشتادسالگی می‌تواند بوسیله فرمول تقریبی:

$$ e_{80} = 3/725 + 0/0000625\ l_{80} $$

محاسبه شود، لازم به توضیح است که در جدول ۱۰-۵ محاسبه ${}_1L_0$ و ${}_4L_1$ و e_{80} مستقیماً براساس اطلاعات کامل در جدول طول عمر مختصر نشده بدست آمده است.

جدول ۱۰-۵. جدول عمر زنان شهری ایران در سال ۱۳۵۲

گروه سنی	$_nm_x$	$_nq_x$	$_nP_x$	l_x	$_nL_x$	T_x	e_x
۰ ساله	۰/۰۶۸۲۵	۰/۰۶۶۰۰	۰/۹۴۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۹۵۸۰۰	۶۳۶۶۲۳۸	۶۳/۶۶
۱–۴	۰/۰۰۶۸۷	۰/۰۲۷۱۱	۰/۹۷۲۸۹	۹۴۰۰۰	۳۶۹۸۸۲	۶۲۷۰۴۳۸	۶۶/۷۱
۵–۹	۰/۰۰۰۸۷	۰/۰۰۴۳۴	۰/۹۹۵۶۶	۹۱۴۵۱	۴۵۶۲۶۳	۵۹۰۰۵۵۶	۶۴/۵۲
۱۰–۱۴	۰/۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۴۵	۰/۹۹۹۵۵	۹۱۰۵۴	۴۵۵۱۶۸	۵۴۴۴۲۹۳	۵۹/۷۹
۱۵–۱۹	۰/۰۰۰۴۳	۰/۰۰۲۱۵	۰/۹۹۷۸۵	۹۱۰۱۳	۴۵۴۵۷۵	۴۹۸۹۱۲۵	۵۴/۸۲
۲۰–۲۴	۰/۰۰۰۳۰	۰/۰۰۱۵۰	۰/۹۹۸۵۰	۹۰۸۱۷	۴۵۳۷۴۵	۴۵۳۴۵۵۰	۴۹/۹۳
۲۵–۲۹	۰/۰۰۰۶۳	۰/۰۰۳۱۵	۰/۹۹۶۸۵	۹۰۶۸۱	۴۵۲۶۹۳	۴۸۰۰۸۰۵	۴۵/۰۰
۳۰–۳۴	۰/۰۰۱۲۱	۰/۰۰۶۰۳	۰/۹۹۳۹۷	۹۰۳۹۶	۴۵۰۶۱۵	۳۶۲۸۱۱۲	۴۰/۱۴
۳۵–۳۹	۰/۰۰۱۴۶	۰/۰۰۷۲۷	۰/۹۹۲۷۳	۸۹۸۵۰	۴۴۷۶۱۸	۳۱۷۷۴۹۷	۳۵/۳۶
۴۰–۴۴	۰/۰۰۱۴۴	۰/۰۰۷۱۷	۰/۹۹۲۸۳	۸۹۱۹۷	۴۴۴۳۸۸	۲۷۲۹۸۷۸	۳۰/۶۱
۴۵–۴۹	۰/۰۰۲۴۹	۰/۰۱۲۳۷	۰/۹۸۷۶۳	۸۸۵۵۸	۴۴۰۰۵۰	۲۲۸۵۴۹۰	۲۵/۸۱
۵۰–۵۴	۰/۰۰۷۹۲	۰/۰۳۸۸۳	۰/۹۶۱۱۷	۸۷۴۶۲	۴۲۸۸۲۰	۱۸۴۵۴۴۰	۲۱/۱۰
۵۵–۵۹	۰/۱۱۷۰	۰/۰۵۶۸۴	۰/۹۴۳۱۶	۸۴۰۶۶	۴۰۸۳۸۵	۱۴۱۹۶۲۰	۱۶/۸۹
۶۰–۶۴	۰/۰۳۹۵۷	۰/۱۸۰۰۴	۰/۸۱۹۹۶	۷۹۲۸۸	۳۶۰۷۵۳	۱۰۱۱۲۳۵	۱۲/۷۵
۶۵–۶۹	۰/۰۵۲۶۳	۰/۲۳۲۵۵	۰/۷۶۷۴۵	۶۵۰۱۳	۲۸۷۲۶۸	۶۵۰۴۸۲	۱۰/۰۱
۷۰–۷۴	۰/۱۱۲۵۰	۰/۴۳۹۰۲	۰/۵۶۰۹۸	۴۹۸۹۴	۱۹۴۷۱۰	۳۶۳۲۲۴	۷/۲۸
۷۵–۷۹	۰/۱۳۴۶۲	۰/۵۰۳۶۱	۰/۴۹۶۳۹	۲۷۹۹۰	۱۰۴۷۰۵	۱۶۸۵۱۴	۶/۰۲
۸۰ +	۰/۳۰۱۷۸	۱/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۱۳۸۹۲	۶۳۸۰۹	۶۳۸۰۹	۴/۵۹

به عنوان مثال جدول عمر زنان شهری ایران که براساس یک آمارگیری نمونه‌ای در سال ۱۳۵۲ توسط دانشکده بهداشت دانشگاه تهران تنظیم گردیده در جدول ۱۰ –۵ ارائه شده است.

براساس این جدول امید به زندگی برای یک نوزاد برابر ۶۳/۶۶ و برای یک کودک ۵ ساله برابر ۶۴/۵۲ سال بدست می‌آید و نیز براساس این جدول احتمال آنکه یک شخص ۲۰ ساله تا ۴۰ سالگی فوت نکند برابر است با :

$$p=\frac{l_{۴۰}}{l_{۲۰}}=\frac{۸۹۱۹۷}{۹۰۸۱۷}=۰/۹۸۲$$

و یا احتمال اینکه این فرد قبل از ۵۰ سالگی فوت کند برابر است با :

$$p=۱-\frac{l_{۵۰}}{l_{۲۰}}=۱-\frac{۸۷۴۶۲}{۹۰۸۱۷}=۱-۰/۹۶۳=۰/۰۳۷$$

۱۰-۵-۱-۲. جدول عمر همگروهی

اصول اساسی که درباره جدول عمر شرح داده شد با تغییر جزئی وسیله بسیار مفیدی در بررسی الگو بقاء و یا طول مدت درمان برای روشهای مختلف درمانی است. برای تعیین الگوی بقاء می‌توان گروهی از افراد را در نظر گرفته و آنها را تا وقوع رخداد مورد نظر دنبال کرد. در این صورت تابع چگالی، تابع توزیع و درنتیجه تابع بقاء (تابع توزیع – ۱) قابل محاسبه است. بدست آوردن الگوی کامل بقاء فوق مستلزم این است که کل افراد مورد مطالعه تا زمان رخداد پیگیری شوند و نیز هیچ یک از این افراد در طول زمان مطالعه از آن خارج نشوند. همچنین در تحلیل بقاء ممکن است احتمال رخداد برای کلیه افراد از شروع مطالعه تا یک فاصله معین مورد نظر باشد که می‌توان رخداد تا این زمان را به عنوان واقعه مورد بررسی در نظر گرفت و احتمال آن را براساس متغیرهای مستقل از جمله به روش رگرسیون لوژستیک مورد بررسی قرار داد. ولی در این مطالعات معمولاً تمام افراد در یک زمان وارد مطالعه نمی‌شوند و در نتیجه در هنگام قطع مطالعه فاصله زمانی در معرض برای همه افراد یکسان نیست. حتی اگر طول مطالعه را برای همه افراد یکسان منظور کنیم نیز ممکن است به دلائل مهاجرت و یا واقعه‌ای غیر از حادثه مورد نظر فرد یا افرادی قبل از رسیدن به انتهای دوره از مطالعه خارج شوند.

در عمل به دلیل طولانی بودن دوره مطالعه و یا پایان زمان اختصاص داده شده به مطالعه نمی‌توان کل افراد را تا زمان رخداد یا تا یک زمان معین پیگیری کرد. برای رفع این مشکل با اعمال تعدیل‌هایی می‌توان احتمال‌های شرطی را محاسبه کرده و براساس آن تابع بقاء را بدست آورد. بدین منظور نصف تعداد سانسور شده در هر فاصله را از افراد در معرض خطر در شروع مطالعه کم می‌کنیم.

برای درک این موضوع از اطلاعات ارائه شده توسط Berkson و Gage که بقاء ۳۷۴ بیمار بدخیم بعد از عمل جراحی را نشان می‌دهد استفاده می‌کنیم. محاسبه بقاء به روش فوق برای این مطالعه در جدول (۱۰ – ٦) ارائه شده است.

ستونهای ۱ تا ٤ داده‌های اولیه و ستونهای ۵ تا ۸ اطلاعات مورد نیاز برای تشکیل جدول عمر همگروهی است. ستون ۱ فاصله زمانی از عمل جراحی برحسب سال را نشان می‌دهد. ستون ۲ و ۳ به ترتیب معرف تعداد افراد فوت شده و تعداد افراد خارج شده از مطالعه در طول دوره می‌باشند. ستون ٤ تعداد افراد در شروع دوره زمانی و ستون ۵ تعداد افراد در معرض خطر تعدیل شده در هر دوره را نشان می‌دهد که برابر است با تعداد افراد در شروع هر دوره زمانی منهای نصف تعداد افراد خارج شده از مطالعه در آن دوره. در واقع، براساس این تعدیل برای هر فرد خارج شده نصف زمان

دوره را به عنوان مدت در معرض خطر بودن منظور کرده‌ایم. ستون ٦ برآورد احتمال فوت در طول هر دوره را نشان می‌دهد. برای دوره x ام این احتمال برابر است با $\frac{d_x}{n_x}$ که n_x همان تعداد افراد در معرض خطر تعدیل یافته می‌باشد. برای مثال در سطر اول $q_1 = \frac{۹۰}{۳۷٤/۰} =$ ۰/۲٤۰٦ است. ستون ۷ احتمال بقاء در طول دوره یعنی مکمل ستون ٦ می‌باشد و در نهایت ستون ۸ نشان دهنده تابع بقاء و یا احتمال بقاء در انتهای دوره است.

جدول ۱۰-٦. محاسبات جدول عمر برای بیماران بدخیم پس از یک عمل جراحی

۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸
فاصله زمانی از عمل جراحی (برحسب سال)	آخرین گزارش دراین فاصله		تعداد افراد در شروع دوره زمانی l_x	تعداد افراد در معرض خطر تعدیل شده n_x	احتمال فوت q_x	احتمال بقا p_x	تابع بقاء S_x
	فوت d_x	خارج شده از مطالعه w_x					
۱	۹۰	۰	۳۷٤	۳۷٤/۰	۰/۲٤۰٦	۰/۷۵۹٤	۰/۷۵۹٤
۲	۷٦	۰	۲۸٤	۲۸٤/۰	۰/۲٦۷٦	۰/۷۳۲٤	۰/۵۵٦۲
۳	۵۱	۰	۲۰۸	۲۰۸/۰	۰/۲٤۵۲	۰/۷۵٤۸	۰/٤۱۹۸
٤	۲۵	۱۲	۱۵۷	۱۵۱/۰	۰/۱٦۵٦	۰/۸۳٤٤	۰/۳۵۰۳
۵	۲۰	۵	۱۲۰	۱۱۷/۵	۰/۱۷۰۲	۰/۸۲۹۸	۰/۲۹۰۷
٦	۷	۹	۹۵	۹۰/۵	۰/۰۷۷۳	۰/۹۲۲۷	۰/۲٦۸۲
۷	٤	۹	۷۹	۷٤/۵	۰/۰۵۳۷	۰/۹٤٦۳	۰/۲۵۳۸
۸	۱	۳	٦٦	٦٤/۵	۰/۰۱۵۵	۰/۹۸٤۵	۰/۲٤۹۹
۹	۳	۵	٦۲	۵۹/۵	۰/۰۵۰٤	۰/۹٤۹٦	۰/۲۳۷۳
۱۰	۲	۵	۵٤	۵۱/۵	۰/۰۳۸۸	۰/۹٦۱۲	۰/۲۲۸۱

لازم به ذکر است که صحت تعدیل‌های به‌کار رفته در داده‌های ناقص مبنی بر پذیرش سه اصل زیر می‌باشد:

۱. سانسور شدن اطلاعات افراد به طور یکنواخت در طول هر دوره صورت پذیرد. در واقع پذیرش نصف زمان دوره برای فرد سانسور شده مناسب باشد.

۲. خارج شدن فرد از مطالعه وابسته به نتیجه مطالعه نباشد. برای مثال اگر افرادی که مطالعه را ترک می‌کنند، آنهایی باشند که به درمان پاسخ نداده‌اند استفاده از تعدیل فوق می‌تواند گمراه کننده باشد.

۳. احتمال بقاء برای افرادی که در زمانهای مختلف وارد مطالعه می‌شوند ثابت باشد. برای مثال اگر پیامد مورد نظر بقاء بعد از یک عمل جراحی باشد، مهارت جراح در طی زمان ثابت باشد.

۱۰-۵-۲. برآورد منحنی بقاء از روش کاپلان مایر

در این روش برخلاف جدول عمر، احتمال بقاء برای لحظه‌ای که حادثه رخ می‌دهد محاسبه می‌شود. بدین ترتیب نیازی به فرضیه یکنواخت بودن میزان خروج افراد در طول مطالعه وجود ندارد.

چنانچه n_t معرف افرادی باشد که در لحظه t در معرض خطر باشند و در آن لحظه تعداد d_t (معمولاً یک) اتفاق رخ دهد در این صورت احتمال بقاء برای لحظه t برابر است با :

$$p_t = ۱ - q_t = \frac{n_t - d_t}{n_t}$$

که در آن q_t احتمال وقوع حادثه در لحظه t و p_t احتمال بقاء در لحظه t می‌باشد. بدیهی است برای کلیه زمانهایی که اتفاق رخ نمی‌دهد احتمال بقاء برابر یک خواهد بود. در این صورت احتمال بقاء تا اتفاق حادثه بعدی ثابت می‌باشد. لیکن هرگاه اتفاقی رخ داد احتمال بقا تا آن لحظه به صورت تجمعی برابر حاصلضرب احتمال بقاء برای زمانهای قبل خواهد بود.

مثال: اطلاعات جدول ۱۰-۷ و نمودار ۱۰-۱ مربوط به احتمال بقاء برای ۳۱ بیمار مبتلا به سیروز اولیه همراه با انسداد مجاری صفراوی می‌باشد.

جدول ١٠-٧. محاسبه برآورد کاپلان مایر تابع بقاء برای ٣١ بیمار مبتلا به سیروز اولیه همراه با انسداد مجاری صفراوی

زمان (روز) t	تعداد افراد در معرض خطر در زمان t n_t	تعداد فوت در زمان t d_t	تعداد افرادی که در زمان t از مطالعه خارج شده‌اند c_t	احتمال فوت $q_t=d_t/n_t$	احتمال بقاء $p_t = 1-q_t$	تابع بقاء $S(t)=S(t-1)\times p_t$
١٩	٣١	١	٠	٠/٠٣٢٣	٠/٩٦٧٧	٠/٩٦٧٧
٤٨	٣٠	١	٠	٠/٠٣٣٣	٠/٩٦٦٧	٠/٩٣٥٥
٩٦	٢٩	١	٠	٠/٠٣٤٥	٠/٩٦٥٥	٠/٩٠٣٢
١٥٠	٢٨	١	٠	٠/٠٣٥٧	٠/٩٦٤٣	٠/٨٧١٠
١٧٧	٢٧	١	٠	٠/٠٣٧٠	٠/٩٦٣٠	٠/٨٣٨٧
١٩٣	٢٦	١	٠	٠/٠٣٨٥	٠/٩٦١٥	٠/٨٠٦٥
٢٠١	٢٥	١	٠	٠/٠٤٠٠	٠/٩٦٠٠	٠/٧٧٤٢
٢٤٥	٢٤	١	٠	٠/٠٤١٧	٠/٩٥٨٣	٠/٧٤١٩
٢٥١	٢٣	١	٠	٠/٠٤٣٥	٠/٩٥٦٥	٠/٧٠٩٧
٢٥٦	٢٢	١	٠	٠/٠٤٥٥	٠/٩٥٤٥	٠/٦٧٧٤
٣٠٢	٢١	٠	١	٠	١	٠/٦٧٧٤
٣٤١	٢٠	١	٠	٠/٠٥٠٠	٠/٩٥٠٠	٠/٦٤٣٥
٣٩٥	١٩	١	٠	٠/٠٥٢٦	٠/٩٤٧٤	٠/٦٠٩٧
٤٢١	١٨	١	٠	٠/٠٥٥٦	٠/٩٤٤٤	٠/٥٧٥٨
٤٦٤	١٧	١	٠	٠/٠٥٨٨	٠/٩٤١٢	٠/٥٤١٩
٥٧٨	١٦	١	٠	٠/٠٦٢٥	٠/٩٣٧٥	٠/٥٠٨١
٥٨٢	١٥	٠	١	٠	١	٠/٥٠٨١
٥٨٦	١٤	٠	١	٠	١	٠/٥٠٨١
٦٨٨	١٣	١	٠	٠/٠٧٦٩	٠/٩٢٣١	٠/٤٦٩٠
٨٢٨	١٢	٠	١	٠	١	٠/٤٦٩٠
٩٤٧	١١	١	٠	٠/٠٩٠٩	٠/٩٠٩١	٠/٤٢٦٣
١١٥٩	١٠	٠	١	٠	١	٠/٤٢٦٣
١٢١٩	٩	١	٠	٠/١١١١	٠/٨٨٨٩	٠/٣٧٩٠
١٢٦٨	٨	١	٠	٠/١٢٥٠	٠/٨٧٥٠	٠/٣٣١٦
١٢٩٢	٧	٠	١	٠	١	٠/٣٣١٦
١٦٩٣	٦	١	٠	٠/١٦٦٧	٠/٨٣٣٣	٠/٢٧٦٣
١٨٨١	٥	١	٠	٠/٢٠٠٠	٠/٨٠٠٠	٠/٢٢١١
١٩٤٠	٤	١	٠	٠/٢٥٠٠	٠/٧٥٠٠	٠/١٦٥٨
١٩٧٥	٣	١	٠	٠/٣٣٣٣	٠/٦٦٦٧	٠/١١٠٥
٢٣٣٨	٢	٠	١	٠	١	٠/١١٠٥
٢٣٤٣	١	١	٠	١	٠	٠

ستون آخر این جدول مربوط به احتمال بقاء تا لحظه t است که از حاصلضرب احتمال بقاء برای لحظه t و لحظه‌های قبل از آن محاسبه می‌شود. مثلا احتمال بقاء تا روز ۱۵۰ام برابر است با:

$$S(۱۵۰) = ۰/۹۶۴۳ \times ۰/۹۶۵۵ \times ۰/۹۶۶۷ \times ۰/۹۶۷۷ = ۰/۸۷۱۰$$

با توجه به اهمیت احتمال بقاء تا لحظه t می‌توان از روابط زیر به محاسبه خطای معیار و حدود اعتماد احتمال بقاء تا لحظه t اقدام کرد.

(تابع بقاء) حدود اعتماد ۹۵درصد احتمال بقاء تا لحظه t = $S(t)^{1/EF}$ تا $S(t)^{EF}$

که در آن

$$EF = e^{[۱/۹۶ \times \frac{\sqrt{\sum \frac{d}{n(n-d)}}}{LnS(t)}]}$$

d و n شامل سطر مورد نظر و سطرهای قبل می‌باشد.

مثلا حدود اعتماد بقاء تا روز ۱۵۰ ام برابر است با :

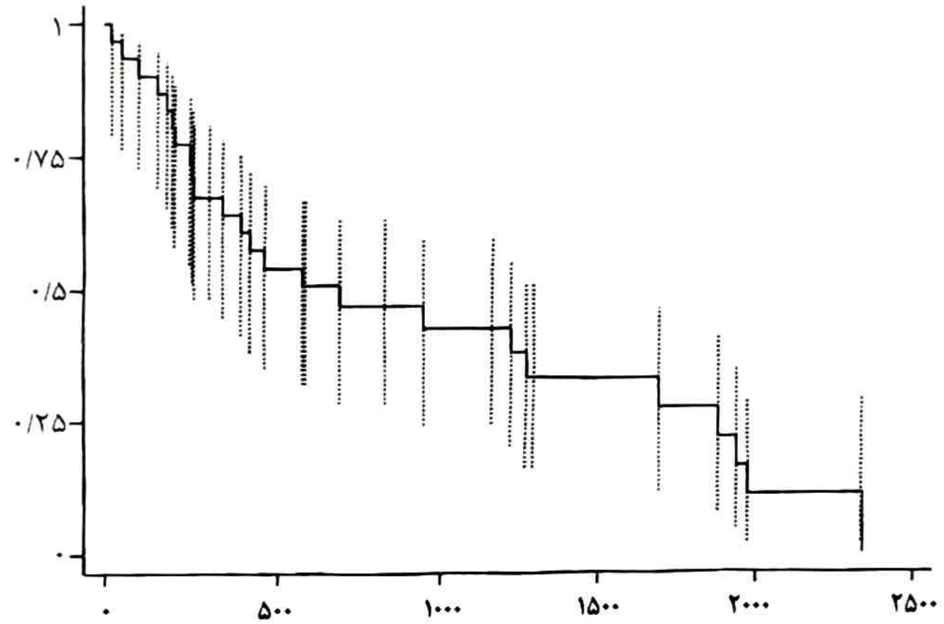
$$\sum \frac{d}{n(n-d)} = \frac{۱}{۳۱ \times ۳۰} + \frac{۱}{۳۰ \times ۲۹} + \frac{۱}{۲۹ \times ۲۸} + \frac{۱}{۲۸ \times ۲۷} = ۰/۰۰۴۸$$

$$LnS(t) = Ln\ ۰/۸۷۱۰ = -\ ۰/۱۳۸۱$$

$$EF = \exp\left(۱/۹۶ \times \frac{\sqrt{۰/۰۰۴۸}}{-۰/۱۳۸۱}\right) = ۰/۳۷۴$$

حدود اعتماد ۹۵ درصد برای تابع بقاء = $۰/۸۷۱۰^{\frac{۱}{۰/۳۷۴}}$ و $۰/۸۷۱۰^{۰/۳۷۴}$

$= (۰/۶۹۱$ و $۰/۹۵۰)$



نمودار ۱۰-۱ برآورد کاپلان- مایر تابع بقاء S (t)، همراه با حدود اعتماد ۹۵ درصد برای ۳۱ بیمار با سیروز اولیه همراه با انسداد مجاری صفراوی در شروع مطالعه

۱۰-۵-۳. مقایسه دو تابع بقاء (روش لگ رنک)[1]

روش لگ رنگ برای مقایسه دو تابع بقاء در واقع همان روش کوکران مانتل هنزل است. در این روش براساس χ^2_{MH} که به χ^2 مانتل کوکس[2] نیز معروف است، یکی بودن احتمال بقاء برای دو روش مداخله آزمون می‌شود. بدین ترتیب، برای هر مرحله رخداد واقعه، یک جدول ۲×۲ تشکیل می‌شود. اگر در لحظه t فقط یک رخداد داشته باشیم در این صورت فرد مربوط به یکی از گروه‌های کنترل و یا مواجهه می‌باشد و رخداد برای گروه دیگر صفر است ولی اگر در لحظه t تعداد رخداد بیش از یک باشد می‌تواند تنها به یکی از دو گروه یا به هر دو گروه تعلق داشته باشد فرمول محاسبه این ملاک به شرح زیر است:

$$\chi^2_{MC} = \frac{U^2}{V}$$

که در آن

$$U = \Sigma\,(d_{1t} - E_{1t})$$

1. Log-rank
2. Mantel - Cox

$$E_{1t} = \frac{d_t \times n_{1t}}{n_t}$$

$$V = \sum V_t = \sum \frac{d_t \times n_{.t} \times n_{1t}}{n_t^2} \times \frac{n_t - d_t}{n_t - 1}$$

و $n_{.t}$ و n_{1t} به ترتیب تعداد کنترل و مواجهه و $d_{.t}$ و d_{1t} به ترتیب تعداد رخداد برای گروه کنترل و مواجهه در لحظه t ام می‌باشد. بعلاوه n_t معرف جمع $n_{.t}$ و n_{1t} و نیز d_t معرف جمع $d_{.t}$ و d_{1t} می‌باشد. مقدار χ^2_{MC} با χ^2 جدول با یک درجه آزادی مقایسه می‌شود و اگر ملاک محاسبه شده از $\chi^2_{1-\alpha}$ بزرگتر باشد فرض H_0 (یکسان بودن دو تابع بقاء) را رد کرده و قضاوت می‌کنیم که اختلاف بین این دو معنی‌دار است.

مثال: در یک مطالعه ۱۸۳ بیمار با تشخیص قطعی سیروز اولیه تحت درمان قرار گرفتند. از ۱۵۲ بیماری که انسداد مجاری صفراوی نداشتند ۷۲ مورد و از ۳۱ بیماری که انسداد مجاری صفراوی داشتند ۲۴ مورد مرگ در طول دوران مطالعه رخ داد. اگر انسداد مجاری صفراوی را به عنوان مواجهه در نظر بگیریم جدول ۱۰ – ۸ محاسبات لازم برای بدست آوردن χ^2_{MC} و انجام آزمون لگ رنک برای دو تابع بقاء را نشان می‌دهد.

جدول ۱۰-۸ محاسبات لازم برای بدست آوردن ملاک آزمون لگ رنک، برای بقاء بیماران مبتلا به سیروز اولیه با و بدون انسداد مجاری صفراوی در شروع مطالعه

روز t ام	$n_{.t}$	$d_{.t}$	n_{1t}	d_{1t}	$d_{1t} - \frac{d_t \times n_{1t}}{n_t}$	$\frac{d_t \times n_{1t} \times n_{.t}}{n_t^2} \times \frac{n_t - d_t}{n_t - 1}$
۹	۱۵۲	۲	۳۱	۰	−۰/۳۳۸۸	۰/۲۷۹۹
۱۹	۱۵۰	۰	۳۱	۱	۰/۸۲۸۷	۰/۱۴۱۹
۳۸	۱۵۰	۲	۳۰	۰	−۰/۳۳۳۳	۰/۲۷۶۲
۴۸	۱۴۸	۰	۳۰	۱	۰/۸۳۱۵	۰/۱۴۰۱
۹۶	۱۴۸	۰	۲۹	۱	۰/۸۳۶۲	۰/۱۳۷۰
۱۴۴	۱۴۸	۱	۲۸	۰	−۰/۱۵۹۱	۰/۱۳۳۸
۱۵۰	۱۴۷	۰	۲۸	۱	۰/۸۴۰۰	۰/۱۳۴۴
۱۶۷	۱۴۷	۱	۲۷	۰	−۰/۱۵۵۲	۰/۱۳۱۱
۱۷۷	۱۴۵	۰	۲۷	۱	۰/۸۴۳۰	۰/۱۳۲۳
۱۹۳	۱۴۴	۰	۲۶	۱	۰/۸۴۷۱	۰/۱۲۹۶
۲۰۱	۱۴۴	۰	۲۵	۱	۰/۸۵۲۱	۰/۱۲۶۰
۲۰۷	۱۴۴	۱	۲۴	۰	−۰/۱۴۲۹	۰/۱۲۲۴
۲۴۵	۱۴۳	۰	۲۴	۱	۰/۸۵۶۳	۰/۱۲۳۱
۲۵۱	۱۴۳	۰	۲۳	۱	۰/۸۶۱۴	۰/۱۱۹۴
۲۵۶	۱۴۳	۰	۲۲	۱	۰/۸۶۶۷	۰/۱۱۵۶
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
مجموع					۱۵/۶۸۶	۷/۳۸۷

براساس محاسبات جدول فوق مقدار ملاک کای دو لگ رنک برابر است با :

$$\chi^2_{MC} = \frac{۱۵/۶۸۶^{۲}}{۷/۳۸۴} = ۳۳/۳۲$$

که با مراجعه به جدول χ^2 با یک درجه آزادی در سطح یک درصد نیز معنی‌دار است.

۱۰-۵-٤. مقایسه دو میزان بروز:

در مقایسهٔ دو تابع بقاء به روش لگ رنک، فرض ثابت بودن تابع مخاطره در طول زمان لازم نبـود. در صورتی که پذیرش این فرض منطقی باشد یعنی تابع مخاطره در طول زمان تغییر نکند آنگاه بـرای مقایسهٔ دو تابع بقاء می‌توان از نسبت دو میزان بروز[1] نیز استفاده کرد:

نسبت دو میزان بروز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{(Rate ratio) نسبت دو میزان بروز} = \frac{\text{میزان بروز در گروه مواجهه‌دار}}{\text{میزان بروزدرگروه بدون مواجهه}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\frac{d_1}{T_1}}{\frac{d_0}{T_0}} = \frac{d_1 \times T_0}{d_0 \times T_1}$$

مشابه RR و OR با استفاده از روش دلتا خطای معیار لگاریتم نسبت دو میزان بروز به صـورت زیر بدست می‌آید:

$$SE\big(Ln(Rate\ ratio)\big) = \sqrt{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_0}}$$

و حدود اعتماد $1-\alpha$ برای نسبت دو میزان عبارتست از:

$$\text{Rate ratio حدود اعتماد ۹۵ درصد برای} = \frac{Rate\ \ ratio}{EF}, Rate\ \ ratio \times EF$$

$$EF = e \times p\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \ SE(Ln(Rate\ ratio))\right)$$

ملاک آزمون فرضیهٔ تساوی دو میزان بروز عبارتست از:

$$Z = \frac{Ln(Rate\ \ ratio)}{SE\big(Ln(Rate\ ratio)\big)}$$

که تحـت فرضـیه H_0 (یعنـی تسـاوی دو میـزان) ایـن مـلاک دارای توزیـع نرمـال اسـتاندارد می‌باشد و در آزمون دو دامنه زمانی فرضیهٔ H_0 رد می‌شود که قدر مطلق z از $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ بیشتر باشـد. مثلاً برای $\alpha = ۰/۰۵$ ملاک آزمون از ۱/۹۶ بزرگتر باشد.

1. Rate ratio

تمرین

۱. اطلاعات زیر نتیجه یک مطالعه مورد شاهدی را در مورد استفاده از قرصهای ضد حاملگی و سرطان پستان نشان می‌دهد.

		مورد	شاهد
استفاده از قرصهای ضد حاملگی	بلی	٥٣٧	٥٥٤
	خیر	٦٣٩	٦٢٢
	جمع	١١٧٦	١١٧٦

الف: مقدار نسبت برتری برای استفاده کنندگان قرص‌های ضد حاملگی و سرطان پستان را محاسبه کنید.

ب: حدود اعتماد نسبت برتری را برای ۹۵ درصد محاسبه نمایید.

۲. اطلاعات زیر مربوط به بررسی رابطه استفاده از کنتراسپتیو خوراکی پس از سن یائسگی و خطر انفارکتوس غیر کشنده است.

	مورد	شاهد	جمع
از قرص استفاده می‌کند	٣٢	٨٢٥	٨٥٧
از قرص استفاده نکرده است	٥٦	١٠٤٨	١١٠٤
جمع	٨٨	١٨٧٣	١٩٦١

الف: شاخص نسبت برتری و حدود اعتماد آن را برای ۹۵٪ محاسبه کنید.

ب: آیا براساس این اطلاعات می‌توان فرضیه عدم ارتباط استفاده از قرص‌های ضد حاملگی پس از یائسگی و خطر بروز انفارکتوس غیر کشنده را مردود دانست.

۳. محققی در نظر دارد رابطه استفاده از قرص‌های ضد حاملگی و خطر بروز انفارکتوس میوکارد را در زنان سنین باروری مطالعه کند. از مطالعات گذشته متوجه می‌شود که حدود ۱۰٪ از زنانی که در سن باروری هستند و دچار انفارکتوس شده‌اند مصرف کننده قرص بوده‌اند. اگر انتظار داشته باشد اندازه خطر بروز بیماری در مصرف کنندگان قرص ۱/۸ برابر عدم مصرف کنندگان قرص باشد مقدار نمونه را برابر $\alpha = \beta =$ ۰/۱۰ محاسبه کنید.

٤. اطلاعات زیر مربوط به رابطه فعالیتهای بدنی و بروز انفارکتوس میوکارد در یک مطالعه مورد شاهدی است که بر حسب عادت به کشیدن سیگار طبقه‌بندی شده است.

عادت کشیدن سیگار	شاخص فعالیتهای بدنی	مورد	شاهد	جمع
هرگز نکشیده	بزرگتر از ۲۵۰۰ کیلوکالری	٤١	٨٤	١٢٥
	کمتر از ۲۵۰۰ کیلوکالری	٤٦	٥٢	٩٨
	جمع	٨٧	١٣٤	٢٢٣
ترک کرده	بزرگتر از ۲۵۰۰ کیلوکالری	٦٣	١١٤	١٧٧
	کمتر از ۲۵۰۰ کیلوکالری	٥١	٦٥	١١٦
	جمع	١١٤	١٧٩	٢٩٣
ادامه دارد	بزرگتر از ۲۵۰۰ کیلوکالری	٨٦	٦٨	١٥٤
	کمتر از ۲۵۰۰ کیلوکالری	٧٩	٤٠	١١٩
	جمع	١٦٥	١٠٨	٢٧٣

الف: اندازه نسبت برتری را برای کل و هر یک از گروه‌های عادت به کشیدن سیگار محاسبه کنید.

ب: اندازه یک کاسه شده نسبت برتری و حدود اعتماد آن را محاسبه کنید.

ج: آیا براساس این اطلاعات می‌توان رابطه فعالیتهای بدنی و بروز انفارکتوس میوکارد را در هر یک از گروه‌ها و در کل مردود دانست.

نتیجه نسبت برتری کلی را با نسبت برتری یک کاسه شده مقایسه و بحث کنید.

۵. در یک مطالعه مورد شاهدی ارتباط بین استفاده از IUD و بیماری التهابی لگن (PID) مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه تخمین شده شد که حدود ۲۰٪ کسانی که مبتلا به بیماری

نیستند از IUD استفاده می‌کنند. چنانچه خطر نسبی برابر ۲ و سطح اعتماد معنی‌دار بودن برابر ۵٪ و قدرت آزمون ۸۰٪ باشد، حجم نمونه را محاسبه کنید.

٦. مطالعه‌ای برای مقایسه یک نوع IUD جدید با یک نوع IUD استاندارد، از نظر میزان دفع خود به خود و همچنین میزان حاملگی در مصرف کننده طی ٦ ماه، طراحی شده است. به فرض آن که $\alpha = ۰/۰۵$ خطر نسبی برای هر دو پیامد برابر ۲ وبرای IUD استاندارد میزان دفع خودبخودی و حاملگی، به ترتیب ۱۰٪ و ٤٪ باشد:

الف: برای قدرت ۸۰٪ ، حداقل حجم نمونه لازم برای این مطالعه را محاسبه نمایید

ب: به فرض این که حجم نمونه برای هر گروه ٤۰۰ نفر باشد، قدرت آزمون چه قدر است؟

۷. در مطالعه‌ای عوارض دو روش عقیم کردن از طریق بستن لوله‌ها با الکتروکوآگولاسیون و سیلاستیک باند مورد بررسی قرار گرفت، محققین به ایمن بودن روش کوآگولاسیون نسبت به سیلاستیک باند مشکوک هستند آنها می‌خواهند با سطح معنی‌داری ۵٪ خطر ۲ برابر بودن عارضه را در زمانی که الکتروکوآگولاسیون شده‌اند نسبت به روش سیلاستیک باند کشف کنند. چنانچه قدرت آزمون ۹۵٪ و میزان عارضه در زنان عقیم شده با روش سیلاستیک باند ۱٪ باشد اولاً نوع مطالعه را مشخص کنید. ثانیاً حجم نمونه را برای این مطالعه محاسبه کنید.

۸. اطلاعات زیر مربوط به نتیجهٔ یک مطالعه است که در آن رابطهٔ سرطان بیضه و نزول بیضه ها از شکم به محل خود در هنگام تولد مورد بررسی قرار گرفته است.

موردها	شاهدها		جمع
	بیضه ها نزول نکرده است	بیضه ها نزول کرده است	
بیضه ها نزول نکرده است	٤	۱۱	۱۵
بیضه ها نزول کرده است	۳	۲٤۱	۲٤٤
جمع	۷	۲۵۲	۲۵۹

الف: این مطالعه از چه نوعی است؟

ب : براساس این مطالعه آیا می توان فرضیه عدم ارتباط نزول بیضه ها و سرطان بیضه را مردود شناخت؟

۹. یک مطالعه مقطعی به بررسی نقش عوامل موثر بر شب ادراری دوران کودکی پرداخته است. قسمتی از این داده‌ها در جدول زیر آورده شده است.

جنس	سن	ابتلا به شب ادراری	
		دارد	ندارد
دختر	زیر ۷ سال	۱۷	۸۶
	بالای ۷ سال	۹	۱۰۷
پسر	زیر ۷ سال	۵۲	۱۸۰
	بالای ۷ سال	۲۸	۱۲۰

الف: در هر یک از گروه‌های سنی، رابطه جنس و بیماری را براساس χ^2 بررسی کنید.

ب: نسبت برتری (OR) و حدود اطمینان ۹۵٪ آن را برای هر یک از دو گروه فوق محاسبه کنید.

ج: بدون در نظر گرفتن سن به عنوان مخدوش کننده به دو سوال الف و ب پاسخ دهید.

د: سن را به عنوان مخدوش کننده در نظر گرفته و مجدداً به دو سوال الف و ب پاسخ دهید.

به منظور برآورد ابتلا به شب ادراری بر حسب متغیرهای جنسیت و سن از مدل لوژستیک استفاده شد که در این مدل متغیر x_1 برای جنسیت (کد صفر برای زن و کد یک برای مرد) و x_2 برای سن (کد صفر برای سن بالا ی۷ سال و کد یک برای سن زیر ۷ سال) لحاظ گردید. چنانچه خروجی نرم افزار به صورت زیر باشد:

	برآورد ضرایب	خطای معیار ضرایب
x_1 (جنسیت)	۰/۶۳	۰/۲۵
x_2 (سن)	۰/۳۹	۰/۲۳

ه: براساس خروجی فوق اختلاف ضرایب β_1 و β_2 را با صفر آزمون کنید.

و: حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR جنس (مرد به زن) و همچنین برای سن (زیر ۷ سال نسبت به بالای ۷ سال) را محاسبه کنید.

ز: در صورتی که لگاریتم درستنمایی برای مدلی که تنها شامل عرض مبدا می‌باشد برابر

۲۷۹/۵۹- و برای مدلی که شامل متغیرهای جنسیت و سن برابر ۲۷۳/۸۳- باشد صفر بودن همزمان β_1 و β_2 را آزمون کنید.

۱۰. جدول زیر اطلاعات یک مطالعه موردشاهدی جور شده که در آن رابطهٔ مواجهه با یک ماده شیمیایی و ملانوما (تومر سیاه رنگ پوست) مورد بررسی قرار گرفته است را نشان می دهد.

بیمار	کنترل		جمع
	مواجهه دارد	مواجهه ندارد	
مواجهه دارد	۱۲	۲۳	۳۵
مواجهه ندارد	۱۶	۲۹	٤۵
	۲۸	۵۲	۸۰

الف. براساس این مطالعه آیا می توان فرضیهٔ عدم ارتباط مواجهه با ماده شیمیایی وابتلا به ملانوما را مردود شناخت؟

ب : OR مربوطه و حدود اعتماد ۹۵ درصد آن را محاسبه نمائید و نتایج بدست آمده را تفسیر کنید.

۱۱. به منظور آشنایی با اساس تشکیل یک جدول عمر، اطلاعات فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:

سن (سال)	جمعیت در وسط سال	تعداد موارد مرگ در طول سال
۱-۰	۳۰۰	٤۰
۲-۱	۲۵۰	۳۵
۳-۲	۲۱۰	۳۰
٤-۳	۱۹۰	۳۰
۵-٤	۱۷۵	۲۵
٦-۵	۱٦۰	۳۰
۷-٦	۱۲۰	۳۵
۸-۷	٦۰	۳۰
۹-۸	۳۰	۲۰
۱۰-۹	۸	٦
۱۱-۱۰	۲	۲

براساس این اطلاعات:

الف: جدول عمر را تشکیل دهید.

ب: امید به زندگی را در بدو تولد محاسبه کنید.

ج: امید به زندگی را برای فردی که در ابتدای سال ششم زنده است، حساب کنید.

د: برای فردی که در ابتدای سال چهارم زنده است، احتمال اینکه اقلاً سه سال دیگر عمر کند را محاسبه کنید.

۱۲. در آزمایشی دو گروه از موشها را تحت مواجهه با عامل سرطان زا قرار دادیم. در گروه ۱ به رژیم غذایی موشها ماده محافظت کننده‌ای را اضافه کردیم و در گروه ۲ از رژیم غذایی معمولی استفاده شد. اگر روزهایی که پس از مواجهه با عامل خطر تا مرگ به دلیل سرطان به عنوان پاسخ در نظر گرفته شود و در مواردی که موش به دلیلی غیر از سرطان بمیرد و یا در پایان مطالعه هنوز موش زنده باشد به عنوان حادثه سانسور تلقی شود، براساس اطلاعات زیر برآورد کاپلان مایر تابع بقاء S(t) را برای هر یک از دو گروه بدست آورید و منحنی آن را رسم کنید و درباره معنی‌دار بودن اختلاف دو گروه قضاوت کنید. (علامت * داده سانسور شده را نشان می‌دهد)

گروه اول: ۱۴۳، ۱۶۵، ۱۸۸، ۱۸۸، ۱۹۰، ۱۹۲، ۲۰۶، ۲۰۸، ۲۱۲، ۲۱۶، ۲۲۰، ۲۲۷، ۲۳۰، ۲۳۵، ۲۴۶، ۲۶۵، ۳۰۳، ۲۱۶*، ۲۴۴ *

گروه دوم: ۱۴۲، ۱۵۷، ۱۶۳، ۱۹۸، ۲۰۵، ۲۳۲، ۲۳۲، ۲۳۲، ۲۳۳،۲۳۳، ۲۳۳، ۲۳۳، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۶۱، ۲۸۰، ۲۸۰، ۲۹۵، ۲۹۵، ۳۲۳، ۲۰۴*، ۳۴۴*

۱۳.جدول زیر نتایج یک مطالعه که به منظور بررسی اثر وضعیت مسکن در ابتلا به عفونت حاد دستگاه تنفسی در کودکان زیر ۵ سال انجام شده است را نشان می دهد:

وضعیت مسکن	موارد ابتلا به عفونت حاد تنفسی	مدت زمان در معرض خطر بودن
نامناسب	۳۰	۳۰۰
مناسب	۲۰	۴۰۰
مجموع	۵۰	۷۰۰

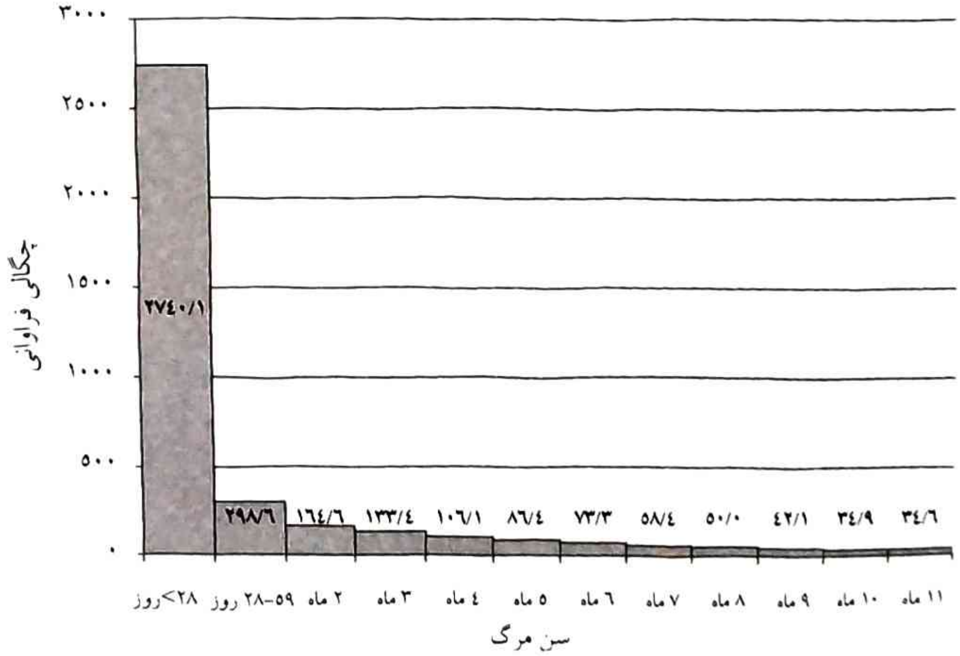
بر اساس اطلاعات فوق نسبت دو میزان بروز و فاصله اطمینان مربوطه را بدست آورید و در مورد معنی دار بودن این نسبت ها اظهار نظر کنید.

پیوست ها

پاسخ تمرین‌ها

پاسخ ۱-۴: پنج گروه اول را با هم ادغام می کنیم و براساس جدول زیر هیستوگرام آن را رسم می‌کنیم:

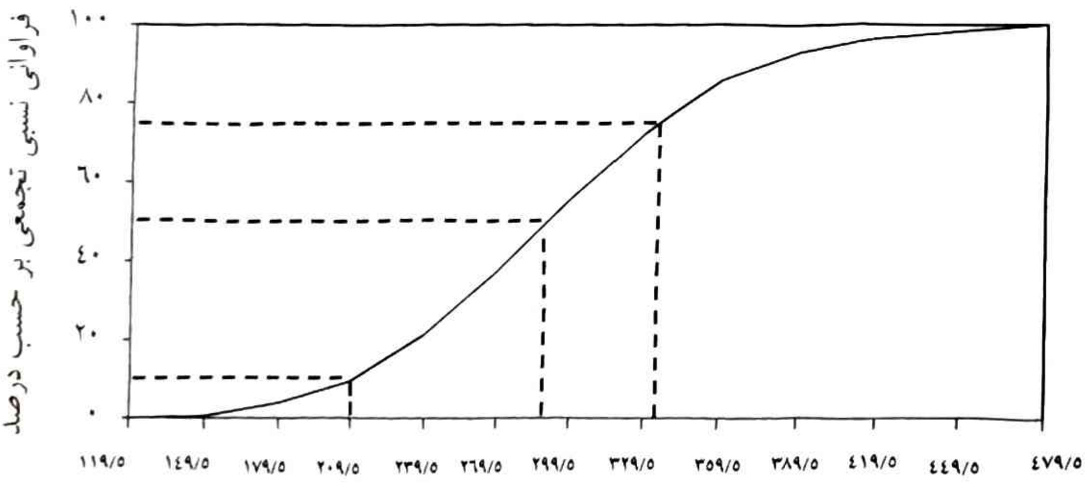
سن مرگ	تعداد (فراوانی)	فراوانی برای یک روز
کمتر از ۲۸ روز	۷۶۷۲۲	۲۷٤۰/۱
۲۸–۵۹ روز	۹۵۵٤	۲۹۸/٦
۲ ماه	٤۹۳۷	۱٦٤/٦
۳ ماه	٤۰۰۲	۱۳۳/٤
٤ ماه	۳۱۸۲	۱۰٦/۱
۵ ماه	۲۵۹۲	۸٦/٤
٦ ماه	۲۲۰۰	۷۳/۳
۷ ماه	۱۷۵۳	۵۸/٤
۸ ماه	۱۵۰۱	۵۰/۰
۹ ماه	۱۲٦۲	٤۲/۱
۱۰ ماه	۱۰٤۷	۳٤/۹
۱۱ ماه	۱۰۳۷	۳٤/٦
جمع	۱۰۹۷۸۹	



پاسخ ۱-۶: ب)

جدول فراوانی تجمعی

کلسترول	فروانی	فراوانی تجمعی	درصد فراوانی تجمعی
۱۲۰ — ۱٤۹	۸	۸	۰/۵
۱۵۰ — ۱۷۹	٤۹	۵۷	۳/۸
۱۸۰ — ۲۰۹	۸۲	۱۳۹	۹/۳
۲۱۰ — ۲۳۹	۱۷٦	۳۱۵	۲۱/۰
۲٤۰ — ۲٦۹	۲٤۲	۵۵۷	۳۷/۱
۲۷۰ — ۲۹۹	۲۷۷	۸۳٤	۵۵/۵
۳۰۰ — ۳۲۹	۲۵۳	۱۰۸۷	۷۲/٤
۳۳۰ — ۳۵۹	۲۰۱	۱۲۸۸	۸۵/۸
۳٦۰ — ۳۸۹	۱۱۱	۱۳۹۹	۹۳/۱
۳۹۰ — ٤۱۹	٤۹	۱٤٤۸	۹٦/٤
٤۲۰ — ٤٤۹	۲۹	۱٤۷۷	۹۸/۳
٤۵۰ — ٤۷۹	۲۵	۱۵۰۲	۱۰۰
جمع	۱۵۰۲		

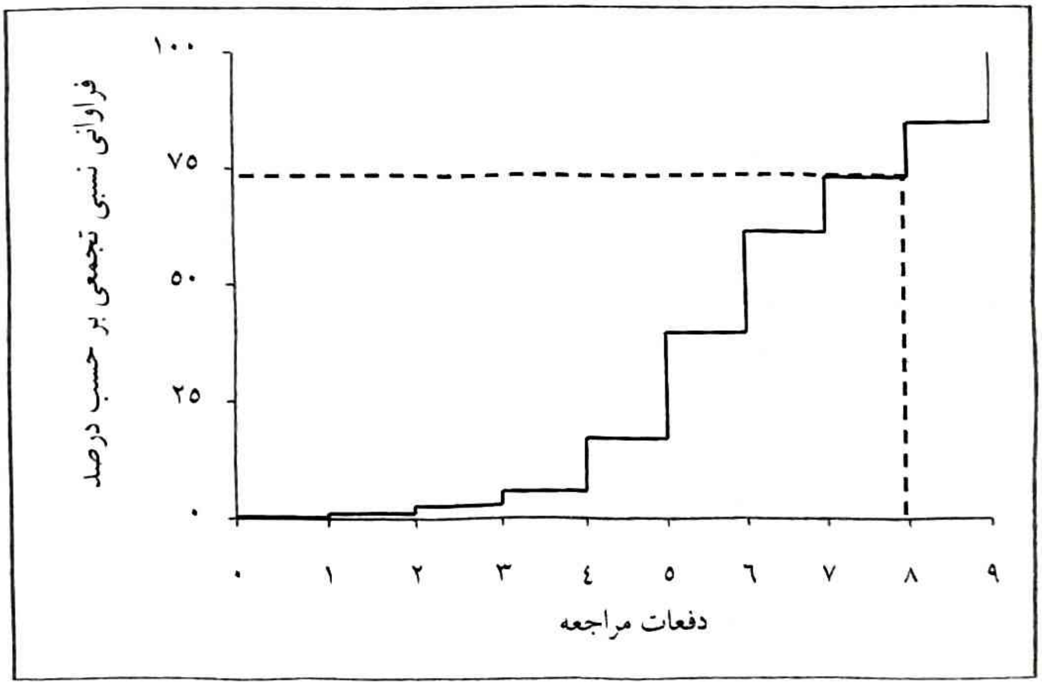


همانطور که مشاهده می‌کنیم صدک دهم، صدک پنجاهم (میانه) و صدک هفتاد و پنجم به ترتیب برابر ۲۱۱/۹، ۲۹۱/۱ و ۳۳٦/۰ می‌باشد.

پاسخ ۱-۷:

جدول فراوانی تجمعی

بارهای مراجعه	فراوانی	فراوانی تجمعی	درصد فراوانی تجمعی
۰	۱	۱	۰/۴۱
۱	۲	۳	۱/۲۲
۲	٤	۷	۲/۸۵
۳	۷	١٤	٥/٦٩
٤	۲۸	٤۲	۱۷/۰۷
٥	٥٦	۹۸	۳۹/۸٤
٦	٥۳	۱٥۱	٦۱/۳۸
۷	۲۹	۱۸۰	۷۳/۱۷
۸	۲۹	۲۰۹	۸٤/۹٦
۹	۳۷	۲٤٦	۱۰۰
جمع	۲٤٦		



با توجه به نمودار فوق ۷۵ درصد از مادران حداکثر ۸ بار به مرکز درمانی فوق مراجعه نموده اند.

$$\text{جایگاه صدک ۷۵ ام} = \frac{۷٥ \times (۲٤٦ + ۱)}{۱۰۰} = ۱۸٥/۲٥$$

ردیف ۱۸۵/۲۵ بین ردیف ۱۸۱ تا ۲۰۹ قرار دارد. بدین ترتیب چارک سوم برابر ۸ خواهد شد.

پاسخ ۱-۱۳: الف)

ساقه	برگ
۵	۶ ۹
۶	٤ ۵ ۹
۷	۰ ۱ ۳ ۶ ۷ ۸
۸	۰ ۲ ۲ ۵ ۶
۹	۱ ۱ ۲ ۲ ۵ ۸ ۹

ب) نمره بیشترین دانشجوها در فاصله ۹۹-۹۱ قرار می گیرد.

پاسخ ۱-١٤: دال **پاسخ ۱-۱۵:** دال **پاسخ ۱-۱٦:** الف **پاسخ ۱-۱۷:** ج

پاسخ ۲-٤: چون مقدار ثابت a از متغیر X کم شده است و حاصل بر k تقسیم گردیده است بنابراین میانگین هم به همین مقدار کاهش می یابد و k برابر کوچک می‌گردد.

$$\mu_{(\frac{x-a}{k})} = \frac{\mu_x - a}{k}$$

لیکن کم کردن عدد ثایت a از متغیر X تاثیری بر انحراف معیار نخواهد داشت. ولی تقسیم آن بر عدد k انحراف معیار را k برابر کوچک می کند.

$$\sigma_{(\frac{x-a}{k})} = \frac{\sigma_x}{k}$$

در قسمت دوم سوال چون ابتدا متغیر X بر k تقسیم و سپس عدد ثابت a کم شده است تغییرات به شرح زیر خواهد بود:

$$\mu_{(\frac{x}{k}-a)} = \frac{\mu_x}{k} - a \qquad \sigma_{(\frac{x}{k}-a)} = \frac{\sigma_x}{k}$$

پاسخ ۲-٦: اگر X_1 تا X_{N_1} مقادیر برای گروه اول، X_{N_1+1} تا $X_{N_1+N_2}$ مقادیر برای گروه دوم باشد:

$$\sum_{i=1}^{N_1+N_2}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{N_1}(X_i-\mu)^2 + \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}(X_i-\mu)^2 \qquad (*)$$

$$\sum_{i=1}^{N_1}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{N_1}(X_i-\mu+\mu_1-\mu_1)^2 = \sum_{i=1}^{N_1}\left[(X_i-\mu_1)+(\mu_1-\mu)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N_1}(X_i-\mu_1)^2 + N_1(\mu_1-\mu)^2 + 2(\mu_1-\mu)\sum_{i=1}^{N_1}(X_i-\mu_1)$$

از آنجا که $\sum_{i=1}^{N_1} X_i = N_1\mu_1$ می باشد بنابراین عبارت سوم سمت راست برابر صفر می شود و در نتیجه:

$$\sum_{i=1}^{N_1}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{N_1}(X_i-\mu_1)^2+N_1(\mu_1-\mu)^2$$

و به همین ترتیب

$$\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}(X_i-\mu_2)^2+N_2(\mu_2-\mu)^2$$

و با جایگذاری دو رابطه فوق در رابطه (*) داریم:

$$\sum_{i=1}^{N_1+N_2}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{N_1}(X_i-\mu_1)^2+N_1(\mu_1-\mu)^2+\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}(X_i-\mu_2)^2+N_2(\mu_2-\mu)^2$$
$$=N_1\sigma_1^2+N_2\sigma_2^2+N_1(\mu_1-\mu)^2+N_2(\mu_2-\mu)^2$$

جمله سوم را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$N_1(\mu_1-\mu)^2=N_1\left(\mu_1-\frac{N_1\mu_1+N_2\mu_2}{N}\right)^2=N_1\left(\frac{(N_1+N_2)\mu_1-N_1\mu_1-N_2\mu_2}{N}\right)^2$$
$$=N_1\left(\frac{N_2\mu_1-N_2\mu_2}{N}\right)^2=\frac{N_1N_2^2}{N^2}(\mu_1-\mu_2)^2$$

و به همین ترتیب

$$N_2(\mu_2-\mu)^2=\frac{N_2N_1^2}{N^2}(\mu_1-\mu_2)^2$$

بنابراین

$$N_1(\mu_1-\mu)^2+N_2(\mu_2-\mu)^2=\frac{N_1N_2^2}{N^2}(\mu_1-\mu_2)^2+\frac{N_2N_1^2}{N^2}(\mu_1-\mu_2)^2$$
$$=\frac{N_1N_2}{N^2}(\mu_1-\mu_2)^2[N_2+N_1]=\frac{N_1N_2}{N}(\mu_1-\mu_2)^2$$

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{N_1+N_2}(X_i-\mu)^2}{N}=\frac{N_1\sigma_1^2+N_2\sigma_2^2+\frac{N_1N_2}{N}(\mu_1-\mu_2)^2}{N}=\frac{N_1\sigma_1^2+N_2\sigma_2^2}{N}+\frac{N_1N_2}{N^2}(\mu_1-\mu_2)^2$$

پاسخ ۲-۹:

$$y=2X_1+4X_2 \quad \mu_1=10\ ,\quad \sigma_1=2\ ,\quad \mu_1=20\ ,\quad \sigma_1=5$$
$$\mu_y=2\mu_1+4\mu_2=2\times10+4\times20=100$$
$$\sigma_y^2=4\sigma_1^2+16\sigma_2^2=4\times4+16\times25=416\rightarrow\quad \sigma_y=20/4$$

پاسخ ۲-۱۰: ب **پاسخ ۲-۱۱: الف** **پاسخ ۲-۱۲: الف** **پاسخ ۲-۱۳: ب**

پاسخ ۲-۱۴: ج **پاسخ ۲-۱۵: الف** **پاسخ۲-۱۶: دال** **پاسخ ۲-۱۷: ب**

پاسخ ۲-۱۸: الف **پاسخ ۲-۱۹: ج** **پاسخ ۲-۲۰: دال** **پاسخ ۲-۲۱: ب**

پاسخ ۳-۲: ه)

P(مجموع اعداد روی دو گلوله ٤ باشد)= P(اولی ۳ دومی ۱)+ P(اولی ۱ دومی ۳)+ P(هر دو ۲)

P(مجموع اعداد روی دو گلوله ٤ باشد)= $\frac{4}{24}\times\frac{4}{23}+\frac{4}{24}\times\frac{4}{23}+\frac{4}{24}\times\frac{3}{23}=0/08$

و) با توجه به این اینکه در مجموع ٦ گلوله سیاه موجود می‌باشد داریم:

P(هر دو گلوله سیاه باشد/یک بودن یکی از گلوله ها)= P(اولی ۱ باشد دومی غیر ۱)+P(اولی غیر ۱ دومی ۱)

P(هر دو گلوله سیاه باشد/یک بودن یکی از گلوله ها)= $\frac{1}{6}\times\frac{5}{5}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}=0/33$

پاسخ ۳-۷:

T^+: جواب آزمایش مثبت باشد — $P(T^+|D^+)=0/97$

T^-: جواب آزمایش منفی باشد — $P(T^+|D^-)=0/05$

D^+: فرد مبتلا به سرطان باشد — $P(D^+)=0/02 \rightarrow P(D^-)=0/98$

D^-: فرد مبتلا به سرطان نباشد

الف) احتمال مثبت بودن تست می‌تواند در دو حالت به شرح زیر رخ دهد:

$$P(T^+)=P(T^+\cap D^+)+P(T^+\cap D^-)=P(T^+|D^+)\times P(D^+)+P(T^+|D^-)\times P(D^-)$$
$$=0/97\times 0/02+0/05\times 0/98=0/0684$$

ب) با استفاده از قضیه بیز داریم:

$$P(D^+|T^+)=\frac{P(T^+|D^+)\times P(D^+)}{P(T^+)}=\frac{0/97\times 0/02}{0/0684}=0/284$$

پاسخ ۳-۸: الف)

P(کودک اقلا یک سال عمر کند)=1-P(احتمال مرگ در سال اول زندگی)=۱-۰/۰۸=۰/۹۲

ب) برای اینکه کودک اقلا ۵ سال عمر کند لازم است نه در سال اول بمیرد و نه در فاصله ۱ تا ۵ سالگی. بنابراین:

P(کودک اقلا ۵ سال عمر کند)= P(سال اول زنده بماند)× P(یکساله/ در فاصله ۱ تا ۵ سالگی زنده بماند)

P(کودک اقلا ۵ سال عمر کند)= $(1-0/08)\times(1-0/04)=0/8832$

ج) برای اینکه کودک در فاصله ۱ تا ۵ سالگی فوت کند باید سال اول زنده بماند. بنابراین:

P(فوت در ۱ تا ۵ سالگی)= P(زنده ماندن تا ۱ سالگی) × P (کودک یکساله/ فوت در فاصله ۱ تا ۵ سالگی)

$=0/92\times 0/04=0/0368$

پاسخ ۳-۱۳: الف) $P=\frac{1}{100},\quad n=10,\quad P(X=1)=\binom{10}{1}\times(0/01)^1\times(0/99)^9=0/091$

ب) $\lambda=np=10\times 0/01=0/1 \qquad P(X=1)=\frac{e^{-0/1}\times(0/1)^1}{1!}=0/0905$

مقایسه دو مقدار نشان می‌دهد که گرد شده مقدار دوم با مقدار اول برابر است.

ج)

$$n = ۳۰۰ \quad p = ۰/۰۱ \quad \lambda = np = ۳۰۰ \times ۰/۰۱ = ۳$$

$$P(X \geq ٤) = 1 - \left(P(X = ۰) + P(X = ۱) + P(X = ۲) + P(X = ۳)\right)$$
$$= ۱ - (e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^۲}{۲} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^۳}{٦} e^{-\lambda})$$
$$= ۱ - (۱ + \lambda + \frac{\lambda^۲}{۲} + \frac{\lambda^۳}{٦}) \times e^{-\lambda} = ۱ - (۱ + ۳ + \frac{۹}{۲} + \frac{۲۷}{٦}) \times e^{-\lambda} = ۰/۳۵۳$$

پاسخ ۳-۱٦: الف) $\lambda = ۲$

$$P(\text{حداکثر یک ذره در ثانیه خارج شود}) = P(X \leq ۱) = P(X = ۰) + P(X = ۱) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = (۱ + \lambda)e^{-\lambda} = ۰/٤۰٦$$

ب) $P(X \leq ۱) = P(X = ۰) + P(X = ۱) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = (۱ + \lambda)e^{-\lambda} = ۰/۹$

با توجه به اینکه حل این مساله به سادگی ممکن نمی باشد یک راه مناسب از طریق جایگذاری مقادیر مختلف به جای λ و پیدا کردن مقداری از λ می‌باشد که با استفاده از آن احتمال فوق ۰/۹ شود.

λ	۰	۰/۱	۰/۲	...	۰/۵	...	۰/۸	۰/۹	۱
$(۱+\lambda)e^{-\lambda}$	۱	۰/۹۹۵	۰/۹۸۲	...	۰/۹۱۰	...	۰/۸۰۹	۰/۷۷۲	۰/۷۳٦

با توجه به اینکه وقتی $\lambda = ۰/۵$ باشد مقدار احتمال برابر ۰/۹ می‌شود بنابراین می‌توان برای احتمال ۰/۹ میانگین ذرات خارج شده در یک ثانیه را ۰/۵ دانست.

پاسخ ۳-۱۹:الف) در این مساله N=۲۰ نفر داریم که در آن k=۵ نفر چه داروی مورد نظر محقق و چه دارونما دریافت کنند بهبود می یابند. محقق ۲۰ فرد مورد نظر را به دو گروه تصادفی تقسیم می کند. اگر X تعداد افراد گروه درمانی که در هر دو حالت بهبود می یابند را نشان دهد محاسبه این احتمال به قرار زیر است:

$$P(X = ٥) = \frac{\binom{٥}{٥} \times \binom{۱٥}{٥}}{\binom{۲۰}{۱۰}} = \frac{۱ \times \frac{۱٥!}{٥! \times ۱۰!}}{\frac{۲۰!}{۱۰! \times ۱۰!}} = \frac{۱ \times ۳۰۰۳}{۱۸٤۷٥٦} = ۰/۰۱٦$$

ب) اگر ۵ موردی که بهبود می یابند در گروه شاهد قرار گیرند بدین معنی است که در گروه درمانی تعداد افرادی که در هر دو حالت بهبود می یابند صفر است.

$$P(X = ۰) = \frac{\binom{٥}{۰} \times \binom{۱٥}{۱۰}}{\binom{۲۰}{۱۰}} = \frac{۱ \times \frac{۱٥!}{۱۰! \times ٥!}}{\frac{۲۰!}{۱۰! \times ۱۰!}} = \frac{۳۰۰۳}{۱۸٤۷٥٦} = ۰/۰۱٦$$

ج)

$$P(\text{حداقل ٤ مورد در گروه درمانی قرار گیرد}) = P(X=٤)+P(X=٥)$$

$$= \frac{\binom{٥}{٤}\times\binom{١٥}{٦}}{\binom{٢٠}{١٠}} + \frac{\binom{٥}{٥}\times\binom{١٥}{٥}}{\binom{٢٠}{١٠}} = ٠/١٣٥ + ٠/٠١٦ = ٠/١٥١$$

پاسخ ۳-۲۲

فقط عیب انکسار چشم	۸	۵۰ دانش‌آموز
فقط چاقی	۳	
دارای هر دو اختلال	۲	
بدون اختلال	۳۷	

الف) همانطور که در متن سوال اشاره شد ۱۳=۲+۳+۸ نفر دارای حداقل یکی از دو عیب فوق و ۳۷ نفر باقیمانده فاقد هر دو اختلال هستند. اگر X تعداد افرادی که در این نمونه ۵ نفری فاقد هر دو اختلال فوق هستند را نشان دهد با استفاده از توزیع فوق هندسی داریم:

n=٥

N=٥٠

k=٣٧

$$P(X=٤) = \frac{\binom{٣٧}{٤}\times\binom{١٣}{١}}{\binom{٥٠}{٥}} = \frac{٦٦٠٤٥\times ١٣}{٢١١٨٧٦٠} = ٠/٤١$$

ب) با استفاده از تعریف کلاسیک احتمال تعداد کل حالات ممکن $\binom{٥٠}{٥}$ در مخرج کسر حاصل ضرب تعداد ترکیب‌های $\binom{٨}{٢}$، $\binom{٣}{١}$، $\binom{٢}{١}$ و $\binom{٣٧}{١}$ در صورت کسر قرار می‌گیرد.

$$P(\text{۲ نفر دارای انکسار چشم، ۱ نفر چاق و ۱ نفر دارای هر دو احتلال}) = \frac{\binom{٨}{٢}\times\binom{٣}{١}\times\binom{٢}{١}\times\binom{٣٧}{١}}{\binom{٥٠}{٥}} = \frac{٦٢١٦}{٢١١٨٧٦٠} = ٠/٠٠٣$$

ج)

$$P(\text{۲ نفر دارای انکسار چشم، ۲ نفر چاق و ۱ نفر دارای هر دو اختلال})=\frac{\binom{۸}{۲}\times\binom{۳}{۲}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۳۷}{۰}}{\binom{۵۰}{۵}}=\frac{۱۶۸}{۲۱۱۸۷۶۰}=۰/۰۰۰۰۸$$

پاسخ ۳-۲۳: الف	**پاسخ ۳-۲۴:** ب	**پاسخ ۳-۲۵:** دال	**پاسخ ۳-۲۶:** دال
پاسخ ۳-۲۷: دال	**پاسخ ۳-۲۸:** دال	**پاسخ ۳-۲۹:** الف	**پاسخ ۳-۳۰:** ب
پاسخ ۳-۳۱: ب	**پاسخ ۳-۳۲:** ب	**پاسخ ۳-۳۳:** دال	**پاسخ ۳-۳۴:** دال
پاسخ ۳-۳۵: ج	**پاسخ ۳-۳۶:** ج		

پاسخ ٤-٤: الف) از آنجا که b بزرگترین عددها می‌باشد تنها در صورتی از میانگین کوچکتر است که هر سه عدد از میانگین کوچکتر باشد. همچنین در توزیع نرمال میانگین و میانه با هم برابر می‌باشند.

$$P(b<\mu)=P\begin{pmatrix}\text{هر سه مشاهده کمتر}\\\text{از میانه باشند}\end{pmatrix}\times P\begin{pmatrix}\text{مشاهده اول کمتر}\\\text{از میانه باشد}\end{pmatrix}\times P\begin{pmatrix}\text{مشاهده دوم کمتر}\\\text{از میانه باشد}\end{pmatrix}\times P\begin{pmatrix}\text{مشاهده سوم کمتر}\\\text{از میانه باشد}\end{pmatrix}$$

$$P(b<\mu)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

ب) از آنجا که a کوچکترین مشاهده است محاسبه این احتمال حالت‌های زیادی را شامل می‌شود مانند اینکه یکی از مشاهدات کمتر از میانه باشد، دو مشاهده کمتر از میانه باشد یا هر سه مشاهده کمتر از میانه باشد. یک راه ساده‌تر محاسبه این احتمال از طریق محاسبه مکمل این احتمال یعنی احتمال اینکه a بزرگتر از میانه باشد است که این احتمال تنها یک حالت دارد.

$$P(a<\mu)=۱-P(a>\mu)=۱-P(\text{هر سه مشاهده بزرگتر از میانه باشد})$$

$$=۱-P\begin{pmatrix}\text{مشاهده اول بزرگتر}\\\text{از میانه باشد}\end{pmatrix}\times P\begin{pmatrix}\text{مشاهده دوم بزرگتر}\\\text{از میانه باشد}\end{pmatrix}\times P\begin{pmatrix}\text{مشاهده سوم بزرگتر}\\\text{از میانه باشد}\end{pmatrix}=۱-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۸}$$

ج) مشابه قسمت ب محاسبه این احتمال از طریق مکمل آن ساده‌تر می‌باشد.

$$P\begin{pmatrix}\text{فاصله a تا b میانگین}\\\text{را شامل شود}\end{pmatrix}=۱-P\begin{pmatrix}\text{فاصله a تا b میانگین}\\\text{را شامل نشود}\end{pmatrix}$$

در صورتی فاصله a تا b میانگین را شامل نمی‌شود که یا هر سه مشاهده بزرگتر از میانگین باشد و یا هر سه مشاهده کوچکتر از میانگین باشد.

$$P\begin{pmatrix}\text{فاصله a تا b میانگین}\\\text{را شامل نشود}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{هر سه مشاهده از میانگین}\\\text{بزرگتر باشند}\end{pmatrix}+P\begin{pmatrix}\text{هر سه مشاهده از میانگین}\\\text{کوچکتر باشند}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{٤}$$

$$P\begin{pmatrix}\text{فاصله a تا b میانگین}\\\text{را شامل شود}\end{pmatrix}=۱-\frac{۱}{٤}=\frac{۳}{٤}$$

پاسخ ٤-٥: ج **پاسخ ٤-٦:** دال **پاسخ ٤-٧:** ب

پاسخ ٥-٤:

با توجه به اینکه برای n های بزرگ مقدار z و t تقریبا با هم مساوی هستند داریم:

$$P(\mu-۱<\bar{x}<\mu+۱)=P(\frac{-۱}{۰/۸}<z<\frac{۱}{۰/۸})=۲\times P(۰<z<۱/۲۵)=۲\times ۰/۳۹٤٤=۰/۷۸۸۸$$

پاسخ ٥-١٣:

$$n=\frac{z^{۲}\times p(۱-p)}{d^{۲}}=\frac{۲/۵۷۵\times ۰/۰۲\times(۱-۰/۰۲)}{۰/۰۰۵^{۲}}=۵۱۹۹$$ تعداد نوزادان

و جمعیت مورد نیاز برای دسترسی به این تعداد نوزاد عبارتند از:

	تعداد تولد زنده	جمعیت
جمعیت مورد نیاز	۱۵	۱۰۰۰
$=\frac{۱۰۰۰\times ۵۱۹۹}{۱۵}=۳٤٦٦۰۰$	۵۱۹۹	؟

پاسخ ٥-١٥:

$$\mu=np=٤۸\times\frac{۱}{٤}=۱۲\quad \sigma^{۲}=npq=٤۸\times\frac{۱}{٤}\times\frac{۳}{٤}=۹$$

$$P(X\geq ۱٦)=P(z=\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{۱٦-۱۲}{\sqrt{۹}})=P(z>۱/۳۳)=۰/۵-۰/٤۰۸۲=۰/۰۹۱۸$$

چون عدد ١٦ در تقریب پیوستگی فاصله ١٦/٥- ١٥/٥ را شامل می شود مناسب است $P(X\geq ۱۵/۵)$ نیز محاسبه شود.

پاسخ ٥-١٧: ب **پاسخ ٥-١٨:** ج **پاسخ ٥-١٩:** د **پاسخ ٥-٢٠:** الف

پاسخ ٥-٢١: ج **پاسخ ٥-٢٢:** ب **پاسخ ٥-٢٣:** الف **پاسخ ٥-٢٤:** دال

پاسخ ٦-٢:

$$\mu_A=۱۲/۳$$

$$\sigma_A=\sigma_B=۱/٤$$

$$\begin{cases}H_0:\mu\leq ۱۲/۳+۰/۵\\ H_1:\mu>۱۲/۳+۰/۵\end{cases}$$

$$n_B=۱٦,\ \bar{X}_B=۱۳$$

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{۱۳-۱۲/۸}{۱/٤/\sqrt{۱٦}}=۰/۵۷<z_{۱-\alpha}=z_{۰/۹۵}=۱/٦٤۵$$

بنابراین گواه کافی مبنی بر رد فرضیهٔ صفر (H_0) وجود ندارد. به عبارت دیگر اختلاف $\overline{X}$ مشاهده شده با عدد ۱۲/۸ از نظر آماری معنی‌دار نمی‌باشد و مسئولین کارخانه B دلیل قابل قبول برای متقاعد کردن مدیر بیمارستان مبنی بر اینکه استحکام نخهای کارخانهٔ آنها حداقل ۰/۵ کیلوگرم بیشتر از کارخانه A است ندارند.

پاسخ ۶-۷:

$$p_0 = ۰/۴ \qquad n = ۱۱۰ \qquad x = ۵۰$$

$$\begin{cases} H_0 : p = ۰/۴ \\ H_1 : p > ۰/۴ \end{cases}$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{۵۰}{۱۱۰} = ۰/۴۵۵$$

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(۱ - p_0)}{n}}} = \frac{۰/۴۵۵ - ۰/۴}{\sqrt{\frac{۰/۴ \times ۰/۶}{۱۱۰}}} = ۱/۱۷ < z_{۱-\alpha} = ۱/۶۴۵$$

بین دو تکنیک B,A تفاوت معنی‌دار وجود ندارد.

پاسخ ۶-۹:

$$n = ۵۰۰ \qquad x = ۲۷۰$$

$$\begin{cases} H_0 : p = ۰/۵ \\ H_1 : p \neq ۰/۵ \end{cases}$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{۲۷۰}{۵۰۰} = ۰/۵۴$$

$$z = \frac{\left(\frac{x}{n}\right) - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(۱ - p_0)}{n}}} = \frac{۰/۵۴ - ۰/۵}{\sqrt{\frac{۰/۵ \times ۰/۵}{۵۰۰}}} = ۱/۷۹ \qquad |۱/۷۹| < z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = ۱/۹۶$$

بنابراین گواه کافی مبنی رد فرضیهٔ صفر یعنی یکسان بودن نسبت دختر و پسر وجود ندارد.

پاسخ ۶-۱۳:

$$n_1 = ۱۰, \overline{X}_1 = ۲۰, s_1 = ۵$$

$$n_2 = ۱۲, \overline{X}_2 = ۲۴, s_2 = ۶$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{۳۶}{۲۵} = ۱/۴۴ < F_{0/۹۷۵}(۱۱,۹) = ۳/۹۱$$

گواه کافی مبنی بر رد فرضیهٔ برابری واریانس‌ها وجود ندارد.

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(10-1)\times 5^2 + (12-1)\times 6^2}{10+12-2} = 31/05$$

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{20-24}{\sqrt{31/05\times\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)}} = -1/676$$

$$t_{0/975}(20) = 2/086 \qquad |1/676| < 2/086$$

گواهی مبنی بر رد فرضیهٔ برابری میانگین‌ها وجود ندارد.

پاسخ ٦-١٥:

$$n_1 = 50, \overline{X}_1 = 3, \sigma_1 = 1$$

$$n_2 = 50, \overline{X}_2 = 2/5, \sigma = 1$$

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{3-2/5}{\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{1}{50}}} = 2/5 \qquad |2/5| > 1/96$$

تأثیر رژیم غذایی خاص در افزایش وزن کودکان به طور معنی‌داری بیشتر از گروه معمولی بوده است.

$$\mu_1 - \mu_2 = 0/5$$

$$n = ? \qquad n = \frac{2(z_{1-\frac{\alpha}{2}} + z_{1-\beta})^2 \times \sigma^2}{(\mu_1-\mu_2)^2}$$

$$1-\beta = 0/85$$

$$\alpha = 0/05 \qquad n = \frac{2(1/96+1/04)^2 \times 1}{(0/5)^2} = 72$$

پاسخ ٦-١٦: الف)

شماره فرد	درجه حرارت دهان (X_i)	درجه حرارت رکتوم (Y_i)	اختلاف درجه حرارت‌ها (d_i)	d_i^2	Y_i^2
١	٣٧/٤	٣٧/٨	٠/٤	٠/١٦	١٣٩٨/٧٦
٢	٣٧/٣	٣٧/٧	٠/٤	٠/١٦	١٣٩١/٢٩
٣	٣٧/١	٣٨/٤	١/٣	١/٦٩	١٣٧٦/٤١
٤	٣٧/٨	٣٨/٢	٠/٤	٠/١٦	١٤٢٨/٨٤
٥	٣٧/٤	٣٧/٨	٠/٤	٠/١٦	١٣٩٨/٧٦
٦	٣٧/١	٣٧/٣	٠/٢	٠/٠٤	١٣٧٦/٤١
٧	٣٧/٧	٣٧/٩	٠/٢	٠/٠٤	١٤٢١/٢٩
٨	٣٧/٧	٣٧/٧	٠/٠	٠/٠	١٤٢١/٢٩
٩	٣٧/٣	٣٧/٧	٠/٤	٠/١٦	١٣٩١/٢٩
جمع	٣٣٦/٨	٣٤٠/٥	٣/٧	٢/٥٧	١٢٦٠٤/٣٤

$$\begin{cases} H_۰ : \mu_d = ۰ \\ H_۱ : \mu_d \neq ۰ \end{cases} \qquad \bar{d} = \frac{\sum di}{n} = \frac{۳/۷}{۹} = ۰/۴۱$$

$$s_d^۲ = \frac{\sum di - \frac{(\sum di)^۲}{n}}{n-۱} = \frac{۲/۵۷ - \frac{(۳/۷)^۲}{۹}}{۸} = ۰/۱۳, s_d = \sqrt{۰/۱۳} = ۰/۳۶$$

$$t = \frac{۰/۴۱ - ۰}{\frac{۰/۳۶}{\sqrt{۹}}} = ۳/۴۲ > t_{۰/۹۷۵}(۸) = ۲/۳۰۶$$

اختلاف معنی‌داری بین میانگین وجود دارد.

پاسخ ۶-۱۹:

$$۸۲۸\ \text{کودک} \begin{cases} \xrightarrow{\text{واکسن}} \\ \xrightarrow{\text{شاهد}} \end{cases}$$

	ni	Xi
واکسن	۵۴۰	۱۴۱
شاهد	۲۸۸	۱۲۹

$$\begin{cases} H_۰ : P_۱ = P_۲ \\ H_۱ : P_۱ \neq P_۲ \end{cases}$$

$$\hat{p}_۱ = \frac{۱۴۱}{۵۴۰} = ۰/۲۶۱, \qquad \hat{p}_۲ = \frac{۱۲۹}{۲۸۸} = ۰/۴۴۸, \qquad \hat{p} = \frac{۱۴۱+۱۲۹}{۸۲۸} = ۰/۳۲۶$$

$$|z| = \left| \frac{\frac{x_۱}{n_۱} - \frac{x_۲}{n_۲} - ۰}{\sqrt{p(۱-p)\left(\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲}\right)}} \right| = \left| \frac{۰/۲۶۱ - ۰/۴۴۸}{\sqrt{۰/۳۲۶ \times (۱-۰/۳۲۶) \times \left(\frac{۱}{۵۴۰} + \frac{۱}{۲۸۸}\right)}} \right| = ۵/۴۶ > ۱/۹۶$$

با توجه به اینکه مطالعه آینده‌نگر است می‌توان نتیجه گرفت که واکسیناسیون به طور معنی‌داری باعث کاهش ابتلا به بیماری مورد مطالعه شده است.

پاسخ ۶-۲۰: محاسبات مشابه سوال ۱۹ بوده با این تفاوت که در سوال ۱۹ کودکان به طور تصادفی به دو گروه واکسن و شاهد تقسیم شده‌اند و به علت تخصیص تصادفی افراد، نقش مخدوش‌کنندگی متغیرهای دیگر کنترل شده و می‌توان اثر واکسن مشاهده شده را علیتی تلقی نمود. بعلاوه مطالعه از نوع آینده‌نگر است یعنی کلیه حوادث بعد از واکسیناسیون در هر دو گروه ثبت می‌گردد و نتایج از اعتبار بالایی برخوردار است.

در صورتی که این اطلاعات نتیجه یک مطالعه مقطعی باشد ممکن است اثر واکسن به علت وجود مخدوش‌کننده‌ها بوده و علیتی نباشد. در این نوع مطالعه‌ها باید مخدوش‌کننده‌های اصلی را شناسایی و اثر آن را به کمک روش‌هایی که در فصل ۱۰ معرفی می‌شوند حذف کرد. همچنین از آنجا که تنها اطلاعات افراد در یک مقطع زمانی جمع‌آوری می‌شود نسبت به سرنوشت کودکان پس از دریافت واکسن اطلاعی در دست نمی‌باشد مثلاً ممکن است تعدادی از کودکان واکسینه شده فوت کرده باشند و در مطالعه وارد نشده باشند. بنابراین در مطالعات مقطعی باید توجه بیشتری نسبت به اثر مخدوش‌کننده‌ها کرد.

پاسخ ۶–۲۵:

$$\begin{cases} H_0 : p_i = \frac{1}{6} & i = 1,2,\ldots,6 \\ H_1 : p_i \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

روهای مختلف	فراوانی مشاهده شده	احتمال	فراوانی مورد انتظار
۱	۱۵	$\frac{1}{6}$	۱۰
۲	۷	$\frac{1}{6}$	۱۰
۳	۴	$\frac{1}{6}$	۱۰
۴	۱۱	$\frac{1}{6}$	۱۰
۵	۶	$\frac{1}{6}$	۱۰
۶	۱۷	$\frac{1}{6}$	۱۰
جمع	۶۰	۱	۶۰

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(15-10)^2}{10} + \frac{(7-10)^2}{10} + \ldots + \frac{(6-10)^2}{10} + \frac{(17-10)^2}{10} = 13/6 > \chi^2_{0/95}(5) = 11/1$$

بنابراین فرضیه صفر «برابری احتمال ظاهر شدن کلیه روهای تاس» رد می‌شود.

پاسخ ۶–۲۸: الف) مستقل بودن احتمال جنس زایمان‌ها یعنی تبعیت توزیع احتمال جنس زایمان‌ها از توزیع دوجمله‌ای با n=4 و p برابر:

$$p = \frac{0\times4 + 1\times9 + 2\times8 + 3\times8 + 4\times3}{32\times4} = \frac{61}{128} = 0/477$$

H_0: توزیع از توزیع دوجمله‌ای تبعیت می‌کند

H_1: توزیع از توزیع دوجمله‌ای تبعیت نمی‌کند

$$P(X=0) = C_4^0 \times (0/477)^0 \times (1-0/477)^4 = 0/075$$

$$P(X=1) = C_4^1 \times (0/477)^1 \times (1-0/477)^3 = 0/273$$

$$P(X=2) = C_4^2 \times (0/477)^2 \times (1-0/477)^2 = 0/373$$

$$P(X=3) = C_4^3 \times (0/477)^3 \times (1-0/477)^1 = 0/227$$

$$P(X=4) = C_4^4 \times (0/477)^4 \times (1-0/477)^0 = 0/052$$

تعداد پسر	۰	۱	۲	۳	۴	جمع
فراوانی مشاهده شده	۴	۹	۸	۸	۳	۳۲
احتمال	۰/۰۷۵	۰/۲۷۳	۰/۳۷۳	۰/۲۲۷	۰/۰۵۲	۱
فراوانی مورد انتظار	۲/۴	۸/۷۳۶	۱۱/۹۳۶	۷/۲۶۴	۱/۶۶۴	۳۲

$$\chi^{۲}=\sum\frac{(O_i-E_i)^{۲}}{E_{i}}=\frac{(۴-۲/۴)^{۲}}{۲/۴}+\frac{(۹-۸/۷۳۶)^{۲}}{۸/۷۳۶}+\ldots+\frac{(۳-۱/۶۶۴)^{۲}}{۱/۶۶۴}=۳/۵۲<\chi^{۲}_{۰/۹۵}(۳)=۷/۸۱$$

بنابراین فرضیه استقلال زایمان‌ها در کل رد نمی‌شود.

ب) محاسبات در این قسمت مشابه قسمت الف می‌باشد با این تفاوت که مقدار **p** معلوم و برابر $\frac{۱}{۲}$ می باشد.

تعداد پسر	۰	۱	۲	۳	۴	جمع
فراوانی مشاهده شده	۴	۹	۸	۸	۳	۳۲
احتمال	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$	۱
فراوانی مورد انتظار	۲	۸	۱۲	۸	۲	۳۲

$$\chi^{۲}=\sum\frac{(O_i-E_i)^{۲}}{E_{i}}=\frac{(۴-۲)^{۲}}{۲}+\frac{(۹-۸)^{۲}}{۸}+\ldots+\frac{(۳-۲)^{۲}}{۲}=۳/۹۶<\chi^{۲}_{۰/۹۵}(۴)=۹/۴۹$$

از آنجاکه مقدار **p** معلوم است درجه آزادی کای دو برابر ۴=۱−۵ خواهد بود. براساس نتایج آزمون مشاهدات فوق از توزیع دوجمله ای با نسبت پیروزی $\frac{۱}{۲}$ نیز تبعیت می کند.

ج) در این قسمت فرضیه مستقل بودن زایمان‌ها پذیرفته شده است و تنها می‌خواهیم برابر $\frac{۱}{۲}$ بودن آن را آزمون کنیم که این آزمون از طریق برابری نسبت با یک عدد مشخص امکان پذیر است.

$$\begin{cases} H_{۰}: p=\frac{۱}{۲} \\ H_{۱}: p\neq\frac{۱}{۲} \end{cases}\qquad z=\frac{(\frac{x}{n})-p_{۰}}{\sqrt{\frac{p_{۰}(۱-p_{۰})}{n}}}=\frac{(\frac{۶۱}{۱۲۸})-\frac{۱}{۲}}{\sqrt{\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{۱۲۸}}}=-۰/۵۳\quad |-۰/۵۳|<۱/۹۶$$

بنابراین بر اساس ملاک آزمون، گواه کافی مبنی بر رد فرضیه صفر یعنی برابری احتمال پسرزایی با $\frac{۱}{۲}$ وجود ندارد و می‌توان احتمال پسرزایی را برابر $\frac{۱}{۲}$دانست.

پاسخ ۶-۳۳:

تحصیلات	n	$\sum x_i$	$\sum x_i^2$
باسواد (x)	٤	۱۰	۲٦
بی‌سواد (y)	٦	۲۰	۷٦

$$s_x^2=\frac{\sum x_i^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}=\frac{26-\frac{(10)^2}{4}}{4-1}=0/33$$

$$s_y^2=\frac{\sum y_i^2-\frac{(\sum y_i)^2}{n}}{n-1}=\frac{76-\frac{(20)^2}{6}}{5}=1/87$$

$$s_p^2=\frac{(n_x-1)s_x^2+(n_y-1)s_y^2}{n_x+n_y-2}=\frac{(4-1)\times 0/33+(6-1)\times 1/87}{4+6-2}=1/29$$

$$F=\frac{s_y^2}{s_x^2}=\frac{1/87}{0/33}=5/7<F_{0/975}(5,3)=14/88$$

بنابراین فرضیه برابری واریانس‌ها رد نمی‌شود.

$$\bar{x}_1=\frac{10}{4}=2/5,\qquad \bar{x}_2=\frac{20}{6}=3/3$$

$$|t|=\left|\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\right|=\left|\frac{2/5-3/3}{\sqrt{1/29\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)}}\right|=|-1/09|<t_{0/975}(8)=2/306$$

بنابراین ارتباط معنی‌داری بین تحصیلات مادر و تعداد حاملگی او وجود ندارد.

پاسخ ۶-۳٤:

$b=43$

$c=7$

$$\chi^2=\frac{(b-c)^2}{b+c}=\frac{(43-7)^2}{43+7}=25/92>\chi^2_{0/95}(1)=3/84$$

بنابراین براساس اطلاعات مطالعه ارتباط معنی‌داری بین استفاده از استروژن و سرطان رحم وجود دارد.

پاسخ ۶-۳۵:

تمرین ۱۳:

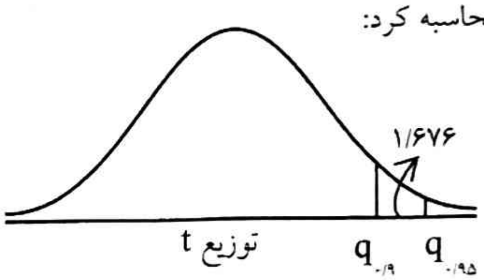
$$\begin{cases}H_0:\mu_1=\mu_2\\ H_1:\mu_1\neq\mu_2\end{cases}$$

ملاک آزمون : $t=-1/676$ ، (درجه آزادی) $df=20$ ، $\alpha=0/05$

$s_p^2=31/05,\ n_1=10,\ n_2=12,\ \bar{X}_1=20,\ \bar{X}_2=24$

$$p-\text{value}=\Pr\left(|t|>۱/۶۷۶\right)=۲\times P(t>۱/۶۷۶)$$

از آنجا که در جدول V تنها مقادیر ۸ صدک توزیع t مشخص شده است به منظور محاسبهٔ دقیق این احتمال لازم است از نرم‌افزارهای آماری استفاده شود ولی به طور تقریبی می‌توان p-value را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$t_{./۹}(۲۰)=۱/۳۲۵<۱/۶۷۶<t_{./۹۵}(۲۰)=۱/۷۲۵$$

$$۰/۰۵<p(t>۱/۶۷۶)<۰/۱$$

در نتیجه p-value در فاصله ۰/۱ تا ۰/۲ قرار دارد. بنابراین فرضیه $H_۰$ رد نمی شود و حدود اعتماد ۹۵ درصد برای «$\mu_۱-\mu_۲$» برابر است با:

$$(\overline{X}_۱-\overline{X}_۲)\pm t_{./۹۷۵}(۲۰)\sqrt{s_p^۲\left(\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}\right)}$$

که در این تمرین عبارت خواهد بود از:

$$۲۰-۲۴\pm ۲/۰۸۶\sqrt{۳۱/۰۵\left(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۲}\right)}=-۴\pm ۴/۹۸$$

که چون صفر را شامل می‌شود بین میانگین دو جامعه اختلاف معنی‌داری وجود ندارد.

تمرین ۱۷:

$$\begin{cases}H_۰:\mu_d=۰\\ H_۱:\mu_d\neq ۰\end{cases}\qquad \bar{d}=۲۴\ ,\ s_d=۲۹/۱۴,\ t=۲/۸۵,\ df=۱۱,\ \alpha=۰/۰۱$$

$$p-\text{value}=P(|t|>۲/۸۵)=۲\times P(t>۲/۸۵)$$

$$t_{./۹۹۰}(۱۱)=۲/۷۱۸<۲/۸۵<t_{./۹۹۵}(۱۱)=۳/۱۰۶$$

$$۰/۰۰۵<P(t>۲/۸۵)<۰/۰۱۰\xrightarrow{\times ۲}۰/۰۱۰<p-\text{value}<۰/۰۲۰$$

بنابراین فرضیهٔ $H_۰$ در سطح معنی‌داری $\alpha=۰/۰۱$ رد نمی‌شود.

حدود اعتماد «$\mu_۱-\mu_۲$» برای ۹۵ درصد برابر است با:

$$\bar{d}\pm t_{./۹۷۵}(۱۱)\quad \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$۲۴\pm ۳/۱۰۶\times\frac{۲۹/۱۴}{\sqrt{۱۱}}=۲۴\pm ۲۷/۳$$

که چون صفر را شامل می‌شود بین میانگین دو جامعه اختلاف معنی‌داری وجود ندارد.

تمرین ۱۹:

$$\begin{cases}H_۰:p_۱=p_۲\\ H_۱:p_۱\neq p_۲\end{cases}\qquad \begin{matrix}\hat{p}_۱=۰/۲۶۱\ ,\ n_۱=۵۴۰\\ \hat{p}_۲=۰/۴۴۸\ ,\ n_۲=۲۸۸\end{matrix}$$

$$p-\text{value}=P(|z|>٥/٤٦)=٢\times P(z>٥/٤٦)\simeq ٠$$

بنابراین فرضیهٔ $H_٠$ رد می‌شود. حدود اعتماد «$\mu_١-\mu_٢$» برای $١-\alpha$ برابر است با:

$$(\hat{p}_١-\hat{p}_٢)\pm\sqrt{\frac{\hat{p}_١(١-\hat{p}_١)}{n_١}+\frac{\hat{p}_٢(١-\hat{p}_٢)}{n_٢}}$$

که در این تمرین عبارت خواهد بود از:

$$(٠/٢٦١-٠/٤٤٨)\pm ١/٩٦\sqrt{\frac{٠/٢٦١\times(١-٠/٢٦١)}{٥٤٠}+\frac{٠/٤٤٨\times(١-٠/٤٤٨)}{٢٨٨}}=-٠/١٨٧\pm ٠/٠٦٨$$

که چون صفر را شامل نمی‌شود فرضیهٔ صفر رد می‌شود و بین نسبت ابتلا به بیماری در گروه واکسن و شاهد اختلاف معنی‌داری وجود دارد.

پاسخ ٦–٣٧:

$$T=٥٧٨,n=٤٠\qquad Z=\frac{T-\frac{n(n+١)}{٤}}{\sqrt{\frac{n(n+١)(٢n+١)}{٢٤}}}=\frac{٥٧٨-\frac{٤٠(٤٠+١)}{٤}}{\sqrt{\frac{٤٠(٤٠+١)(٢\times٤٠+١)}{٢٤}}}=٢/٢٦$$

با توجه به اینکه z محاسبه شده بزرگتر از ۱/۹۶ می‌باشد فرضیهٔ $H_٠$ رد می‌شود و تأثیر هورمون بر وزن‌گیری گوسفندان معنی‌دار می‌باشد.

پاسخ ٦–٣٨:

الف) آزمون پارامتری:

m: مردان , f: زنان

$$n_m=٣٤,\overline{X}_m=٦/١٨,s_m=٤/٢٦$$
$$n_f=٥٤,\overline{X}_f=٨/٣٣,s_f=٣/٣٩$$
$$s_p^٢=\frac{(n_m-١)s_m^٢+(n_f-١)s_f^٢}{n_m+n_f-٢}=\frac{(٣٤-١)\times٤/٢٦^٢+(٥٤-١)\times٣/٣٩^٢}{٣٤+٥٤-٢}=١٤/٠٥$$

$$|t|=\left|\frac{\overline{x}_m-\overline{x}_f}{\sqrt{s_p^٢\left(\frac{١}{n_m}+\frac{١}{n_f}\right)}}\right|=\left|\frac{٦/١٨-٨/٣٢}{\sqrt{١٤/٠٥\left(\frac{١}{٣٤}+\frac{١}{٥٤}\right)}}\right|=|-٢/٦٢|>t_{٠/٩٧٥}(٨٦)\simeq ٢$$

بنابراین میانگین DMF مردان و زنان اختلاف معنی‌داری دارند (p-value=٠/٠١).

ب) آزمون ناپارامتری:

ابتدا اطلاعات مربوط به زنان و مردان را با هم ترکیب کرده و به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. آنگاه به اندازه‌های مرتب شده رتبه ۱، ۲، ...، ۸۸ اختصاص داده و در مواردی که رتبه تکرار شود، میانگین رتبه برای رتبه‌های مشابه منظور گردیده است. رتبه‌های تخصیص داده شده به هر یک از اعداد زیر نمایش داده شده است:

۸(۵۰/۵)	۶(۳۲)	٤(۱۸/۵)	۲(۶)	۱۰(۶۹)	۵(۲۷)	۶(۳۲)	۶(۳۲)	۱۹(۸۸)	٤(۱۸/۵)
۱۰(۶۹)	٤(۱۸/۵)	۱۰(۶۹)	۱۲(۷۷/۵)	۷(۳۹/۵)	۲(۶)	۵(۲۷)	۱(۳)	۸(۵۰/۵)	۲(۶)
۰(۱/۵)	۷(۳۹/۵)	۶(۳۲)	٤(۱۸/۵)	٤(۱۸/۵)	۱۱(۷٤)	۲(۶)	۱۶(۸۶/۵)	۸(۵۰/۵)	۷(۳۹/۵)
۸(۵۰/۵)	٤(۱۸/۵)	۰(۱/۵)	۲(۶)						
٤(۱۸/۵)	۷(۳۹/۵)	۱۳(۸۰)	٤(۱۸/۵)	۸(۵۰/۵)	۸(۵۰/۵)	٤(۱۸/۵)	۱٤(۸۲)	۵(۲۷)	۶(۳۲)
٤(۱۸/۵)	۱۲(۷۷/۵)	۹(۶۱/۵)	۹(۱۶/۵)	۹(۶۱/۵)	۸(۵۰/۵)	۱۲(۷۷/۵)	٤(۱۸/۵)	۸(۵۰/۵)	۸(۵۰/۵)
٤(۱۸/۵)	۱۱(۷٤)	۶(۳۲)	۱۵(۸٤/۵)	۹(۶۱/۵)	۸(۵۰/۵)	۱٤(۸۲)	۹(۶۱/۵)	۸(۵۰/۵)	۹(۶۱/۵)
۷(۳۹/۵)	۱۲(۷۷/۵	۱۱(۷٤)	۷(۳۹/۵)	٤(۱۸/۵)	۱۰(۶۹)	۷(۳۹/۵)	۸(۵۰/۵)	۸(۵۰/۵)	۷(۳۹/۵)
۹(۶۱/۵)	۱۰(۶۹)	۱۶(۸۶/۵)	۱٤(۸۲)	۱۵(۸٤/۵)	۱۰(۶۹)	٤(۱۸/۵)	۶(۳۲)	۳(۱۰)	۹(۶۱/۵)
۳(۱۰)	۱۰(۶۹)	۳(۱۰)	۸(۵۰/۵)						

سپس میانگین رتبه در مردان و زنان را بدست آورده و با جایگذاری در فرمول زیر ملاک آزمون بدست می‌آید:

$$\overline{R}_m = ۳٤/۷۸$$

$$\overline{R}_f = ۵۰/۶۲$$

$$\chi^۲ = \frac{۱۲n_۱n_۲(\overline{R}_m - \overline{R}_f)^۲}{n^۲(n+۱)} \frac{۱۲ \times ۳٤ \times ۵٤(۳٤/۷۸ - ۵۰/۶۲)^۲}{۸۸^۲ \times ۸۹} = ۸/۰۲$$

از آنجا که تعداد نسبتاً زیادی از رتبه‌ها مشابه بودند لازم است مقدار $\chi^۲$ محاسبه شده را بر عامل تصحیح زیر تقسیم کرد:

$$f = ۱ - \frac{\sum_{i=۱}^{t} t_i(t_i - ۱)(t_i + ۱)}{n(n-۱)(n+۱)}$$

$$= ۱ - (۲\times۱\times۳ + ۵\times٤\times۶ + ۳\times۲\times٤ + ۱٤\times۱۳\times۱۵ + ۳\times۲\times٤ + ۷\times۶\times۸ + ۸\times۷\times۹ + ۱٤\times۱۳\times۱۵$$

$$۸\times۷\times۹ + ۷\times۶\times۸ + ۳\times۲\times٤ + ٤\times۳\times۵ + ۳\times۲\times٤ + ۲\times۱\times۳ + ۲\times۱\times۳)/(۸۸\times۸۷\times۸۹) = ۱ - \frac{۷٤۳٤}{۶۸۱۳۸٤} = ۰/۹۹$$

اعمال این تصحیح به دلیل نزدیک بودن آن به عدد یک تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر $\chi^۲$ نمی‌گذارد. لذا چون $\chi^۲$ حاصل یعنی ۸/۲۰۲ از $\chi^۲$ جدول با یک درجه آزادی و سطح معنی‌داری ۰/۰۵ یعنی ۳/۸٤ بیشتر است، فرضیه یکسان بودن میانه DMF در دو گروه مردان و زنان رد می‌شود. (p-value $\leq$ ۰/۰۱)

بنابراین براساس هر دو آزمون اختلاف معنی‌داری بین DMF مردان و زنان مشاهده می‌شود.

نکته: برخلاف نتایج مشاهده شده فوق معمولاً توان آزمونهای آماری پارامتری از معادل ناپارامتری آن بیشتر است.

پاسخ ۷-۱: الف)

$$\begin{cases} H_۰ : \mu_۱ = \mu_۲ = \mu_۳ = \mu_٤ \\ H_۱ : \mu_i \neq \mu_j \end{cases}$$

	شماره تکنسین				
	۱	۲	۳	٤	جمع
n_i	٦	٥	٥	٦	۲۲
$\sum_j X_{ij}$	٦٤	٥٨	٥٦	٨٤	۲٦۲
$\sum_j X_{ij}^2$	٦٩٦	٦٨۲	٦٤۲	۱۱٨۲	۳۲۰۲

$$ss_b = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\sum_j X_{ij})^2}{n_i} - \frac{(\sum\sum X_{ij})^2}{\sum n_i} = \frac{64^2}{6} + \frac{58^2}{5} + \frac{56^2}{5} + \frac{84^2}{6} - \frac{(262)^2}{22} = 38/48$$

$$s_m^2 = \frac{SS_b}{k-1} = \frac{38/48}{4-1} = 12/83$$

$$ss_e = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \sum_i \frac{(\sum_j X_{ij})^2}{n_i} = 3202 - \left(\frac{64^2}{6} + \frac{58^2}{5} + \frac{56^2}{5} + \frac{84^2}{6}\right) = 43/33$$

$$s_p^2 = \frac{SS_e}{N-k} = \frac{43/33}{22-4} = 2/41$$

جدول آنالیز واریانس

منبع تغییرات	SS	df	MS	$F = s_m^2 / s_p^2$
بین گروهها	$SS_b = 38/48$	۳	$s_m^2 = 12/83$	٥/۲٥
داخل گروهها	$SS_e = 43/33$	۱٨	$s_p^2 = 2/41$	
جمع	$SS_T = 81/82$	۲۱		

$$F_{1-\alpha}(k-1, N-k) = F_{/95}(4-1, 22-4) = F_{/95}(3,18) = 3/16 \qquad 5/25 > 3/16$$

بنابراین فرضیهٔ یکسان بودن میانگین مدت زمان لازم برای چهار تکنسین رد می‌شود و حداقل یکی از میانگین‌ها با بقیه اختلاف معنی‌دار دارد.

ب) روش بن فرونی برای تنها یک مقایسه که مشابه همان آزمون ساده است.

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \dfrac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{3} \rightarrow \mu_1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)\mu_2 - \left(\dfrac{1}{3}\right)\mu_3 - \left(\dfrac{1}{3}\right)\mu_4 = 0 \\ H_1: \mu_1 \neq \dfrac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{3} \end{cases}$$

حدود اعتماد $1-\alpha$ برای ترکیب خطی $a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + a_3\mu_3 + a_4\mu_4$ برابر است با:

$$a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + a_3\bar{x}_3 + a_4\bar{x}_4 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k)\sqrt{s_p^2\left(\frac{a_1^2}{n_1} + \frac{a_2^2}{n_2} + \frac{a_3^2}{n_3} + \frac{a_4^2}{n_4}\right)}$$

$$۱۰/۷-\frac{۱}{۳}\times ۱۱/۶-\frac{۱}{۳}\times ۱۱/۲-\frac{۱}{۳}\times ۱۴\pm ۲/۱۰۱\sqrt{۲/۴۱\left(\frac{۱}{۶}+\frac{\frac{۱}{۹}}{۵}+\frac{\frac{۱}{۹}}{۵}+\frac{\frac{۱}{۹}}{۶}\right)}=-۱/۵۷\pm ۱/۵۶$$

بنابراین چون فاصله اطمینان محاسبه شده صفر را در بر نمی‌گیرد فرضیهٔ $H_۰$ رد می‌شود.

ج)

$$\begin{cases} H_۰: \mu_۱=\mu_۳ \rightarrow \mu_۱-\mu_۳=۰ \\ H_۱: \mu_۱\neq\mu_۳ \end{cases}$$

حدود اعتماد $۱-\alpha$ برای ترکیب خطی $\mu_۱-\mu_۳$ برابر است با:

$$\overline{X}_۱-\overline{X}_۳\pm t_{۰/۹۷۵}\sqrt{s_p^۲\left(\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}\right)}$$

$$۱۰/۷-۱۱/۲\pm ۲/۱۰۱\times\sqrt{۲/۴۱\times\left(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۵}\right)}=-۰/۵\pm ۱/۹۸$$

از آنجا که فاصله اطمینان فوق صفر را در بر می‌گیرد فرضیهٔ صفر رد نمی‌شود.

پاسخ ۷-۳: الف)

$$\overline{X}_{..}=\frac{\sum_i n_i\overline{X}_i}{\sum_i n_i}=\frac{۱۰\times ۸۴/۵+۱۰\times ۸۸/۰+۱۰\times ۹۱/۱}{۱۰+۱۰+۱۰}=۸۷/۸۷$$

$$SS_b=\sum_i n_i(\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{..})^۲=۱۰\times(۸۴/۵-۸۷/۸۷)^۲+۱۰\times(۸۸-۸۷/۸۷)^۲+۱۰\times(۹۱/۱-۸۷/۸۷)^۲=۲۱۸/۰۷$$

$$SS_e=۲۷۰$$

منبع تغییرات	SS	*df*	MS	$F=\frac{s_m^۲}{s_p^۲}$
بین گروهها	$SS_b=۲۱۸/۰۷$	۲	۱۰۹/۰۳	۱۰/۹
داخل گروهها	$SS_e=۲۷۰$	۲۷	۱۰	
جمع	$SS_T=۴۸۸/۰۷$	۲۹		

$$F_{۰/۹۵}(۲,۲۷)=۳/۳۵ \qquad ۱۰/۹>۳/۳۵$$

اختلاف معنی‌داری بین فشار خون شریانی در سه رده موش صحرایی وجود دارد.

ب) حدود اعتماد برای ترکیب خطی $\mu_B-\mu_C$ است با:

$$\begin{cases} H_۰: \mu_B=\mu_C \\ H_۱: \mu_B\neq\mu_C \end{cases}$$

(حد بالا) $\mu_B-\mu_C=\overline{X}_B-\overline{X}_C+t_{./۹۷۵}(N-k)\sqrt{s_p^{۲}\left(\frac{۱}{n_B}-\frac{۱}{n_C}\right)}$

$$=۸۸-۹۱/۱+۲/۰۵۲\sqrt{۱۰\times\left(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}\right)}=-۳/۱+۲/۹=-۰/۲$$

(حد پایین) $\mu_B-\mu_C=-۳/۱-۲/۹=۶$

ج) روش بن فرونی تنها برای حالتی که g مقایسه از قبل تعیین شده باشد می‌توان استفاده کرد که چون در این تمرین دو مقایسه از قبل تعیین شده‌اند می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. ولی روش شفه را می‌توان در همه حالت بکار برد.

روش بن فرونی:

(حد بالا) $\mu_B-\mu_C=\overline{X}_B-\overline{X}_C+t_{۱-\frac{\alpha}{۴}}(N-k)\sqrt{s_p^{۲}\left(\frac{۱}{n_B}+\frac{۱}{n_C}\right)}$

$$=۸۸-۹۱/۱+۲/۳۷\sqrt{۱۰\left(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}\right)}$$

$$=-۳/۱+۳/۳۵=۰/۲۵$$

(حد پایین) $\mu_B-\mu_C=-۳/۱-۳/۳۵=-۶/۴۵$

بنابراین فرضیه صفر رد نمی‌شود.

$$\begin{cases}H_۰:\mu_A=\frac{\mu_B+\mu_C}{۲}\\ H_۱:\mu_A\neq\frac{\mu_B+\mu_C}{۲}\end{cases}\rightarrow \mu_A-\frac{۱}{۲}\mu_B-\frac{۱}{۲}\mu_C=۰$$

(حد بالا) $\mu_A-\frac{۱}{۲}\mu_B-\frac{۱}{۲}\mu_C=\overline{X}_A-\frac{۱}{۲}\overline{X}_B-\frac{۱}{۲}\overline{X}_C+t_{۱-\frac{\alpha}{۴}}(N-k)\sqrt{s_p^{۲}\left(\frac{۱}{n_A}+\frac{\frac{۱}{۴}}{n_B}+\frac{\frac{۱}{۴}}{n_C}\right)}$

$$=۸۴/۵-\left(\frac{۱}{۲}\right)\times۸۸-\left(\frac{۱}{۲}\right)\times۹۱/۱+۲/۳۷\sqrt{۱۰\left(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}\right)}$$

$$=-۵/۰۵+۲/۹۰=-۲/۱۵$$

(حد پایین) $\mu_A-\frac{۱}{۲}\mu_B-\frac{۱}{۲}\mu_C=-۵/۰۵-۲/۹۰=-۷/۹۵$

بنابراین فرضیهٔ صفر رد می‌شود.

ج) روش شفه

$$\begin{cases}H_۰:\mu_B=\mu_C\\ H_۱:\mu_B\neq\mu_C\end{cases}\qquad L^{۲}=(k-۱)F_{۱-\alpha}(k-۱,\sum n_i-k)s_p^{۲}\left(\frac{۱}{n_B}+\frac{۱}{n_C}\right)$$

$$L^{۲}=۲\times F_{./۹۵}(۲,۲۷)\times۱۰\times\left(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲۰}\right)=۲\times۳/۳۵\times۲=۱۳/۴,\ L=۳/۷$$

$$\mu_B - \mu_C : ۸۸ - ۹۱/۱ \pm ۳/۷$$
$$: -۳/۱ \pm ۳/۷$$

بنابراین حدود اعتماد برابر (۶/۸و۰/۶-) است که در نتیجه فرضیهٔ صفر رد نمی‌شود.

$$\begin{cases} H_۰ : \mu_A = \dfrac{\mu_B + \mu_C}{۲} \\ H_۱ : \mu_A \neq \dfrac{\mu_B + \mu_C}{۲} \end{cases} \rightarrow \mu_A - \frac{۱}{۲}\mu_B - \frac{۱}{۲}\mu_C = ۰$$

$$L^۲ = ۲ \times ۳/۳۵ \times \left(۱۰ \times \left[\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۴۰} + \frac{۱}{۴۰} \right] \right) = ۱۰/۰۵ \qquad L = ۳/۱۷$$

$$\mu_A - \frac{۱}{۲}\mu_B - \frac{۱}{۲}\mu_C : ۸۴/۵ - \frac{۱}{۲} \times ۸۸/۰ - \frac{۱}{۲} \times ۹۱/۱ \pm ۳/۱۷$$

$$\mu_A - \frac{۱}{۲}\mu_B - \frac{۱}{۲}\mu_C : -۵/۰۵ \pm ۳/۱۷$$

بنابراین حدود اعتماد برابر (۱/۸۸و۸/۲۲-) است که در نتیجه فرضیهٔ صفر رد می‌شود.

همانطور که ملاحظه می‌کنیم حدود اطمینان‌هایی که براساس روش شفه بدست می‌آید عریض‌تر است. مقدار L در روش شفه به تعداد مقایسات بستگی ندارد. حال آنکه دروش بن فرونی بـا افـزایش تعـداد مقایسـات مقدار $t_{۱-\frac{\alpha}{۲g}}$ افزایش می‌یابد. به عنوان یک توصیه کلی در صورتی که تعداد مقایسات کم باشد بهتر است از روش بن فرونی استفاده شود که حدود اعتماد باریکتری ایجاد کند.

پاسخ ۷-۴:

$$\overline{X}_۱ = ۸/۷۵, \overline{X}_۲ = ۷/۵۰, n_۱ = n_۲ = ۸ \ , \ s_۱^۲ = ۱/۶۴ \ , \ s_۲^۲ = ۱/۴۳$$

$$s_p^۲ = \frac{(n_۱ - ۱)s_۱^۲ + (n_۲ - ۱)s_۲^۲}{n_۱ + n_۲ - ۲} = \frac{۷ \times ۱/۶۴ + ۷ \times ۱/۴۳}{۸ + ۸ - ۲} = ۱/۵۳$$

$$t = \frac{۸/۷۵ - ۷/۵}{\sqrt{۱/۵۳(\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸})}} = ۲/۰۲ \langle t_{۰/۹۷۵}(۱۴) = ۲/۱۴۵$$

گواه کافی مبنی بر رد فرضیه صفر وجود ندارد

جدول آنالیز واریانس

منبع تغییرات	SS	df	MS	$F = s_m^۲ / s_p^۲$
بین گروهها	$SS_b = ۶/۲۵$	۱	$s_m^۲ = ۶/۲۵$	$۴/۰۸ \langle F_{/۹۵}(۱,۱۴) = ۴/۶۰$
داخل گروهها	$SS_e = ۲۱/۵۰$	۱۴	$s_p^۲ = ۱/۵۳$	
جمع	$SS_T = ۲۷/۷۵$	۱۵		

گواه کافی مبنی بر رد فرضیه بالا وجود دارد.

$$SS_b = ۸\times(۸/۷۵-۸/۱۲۵)^۲ + ۸\times(۷/۵-۸/۱۲۵)^۲ = ۶/۲۵$$
$$SS_e = (۸-۱)\times۱/۶۴ + (۸-۱)\times۱/۴۳ = ۲۱/۵۰$$

نکته: توجه شود که رابطه زیر بین توزیع های t و F وجود دارد:

$$t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n) = F_{۱-\alpha}(۱,n), \quad t_{/۹۷۵}(۱۴) = ۲/۱۴۵^۲ = ۴/۶۰ = F_{/۹۵}(۱,۱۴), \quad t^۲ = ۲/۰۲^۲ = ۴/۰۸ = F$$

پاسخ ۷-۶:

$$SS_c = \sum_i \frac{X_{i..}^۲}{nr} - \frac{X_{...}^۲}{nrc} = \left(\frac{۳۱/۹^۲}{۴} + \frac{۵۰/۸^۲}{۴} + \frac{۳۹/۷^۲}{۴}\right) - \frac{۱۲۲/۴^۲}{۱۲} = ۴۵/۱۰۵$$

$$SS_r = \sum_j \frac{X_{.j.}^۲}{nc} - \frac{X_{...}^۲}{nrc} = \left(\frac{۶۲/۲^۲}{۶} + \frac{۶۰/۲^۲}{۶}\right) - \frac{۱۲۲/۴^۲}{۱۲} = ۰/۳۳$$

$$SS_s = \frac{۱}{n}\sum_i\sum_j X_{ij.} - \frac{X_{...}^۲}{nrc} = \frac{۱۶/۲^۲}{۲} + \frac{۲۵/۴^۲}{۲} + \frac{۲۰/۶^۲}{۲} + \frac{۱۵/۷^۲}{۲} + \frac{۲۵/۴^۲}{۲} + \frac{۱۹/۱^۲}{۲} - \frac{۱۲۲/۴^۲}{۱۲} = ۴۵/۷۳$$

$$SS_I = SS_c - SS_c - SS_r = ۴۵/۷۳ - ۴۵/۱۱ - ۰/۳۳ = ۰/۲۹$$

$$SS_T = \sum\sum\sum x_{iju}^۲ - \frac{X_{...}^۲}{nrc} = ۸/۲^۲ + ۸/۰^۲ + \ldots + ۹/۷^۲ + ۹/۴^۲ - \frac{۱۲۲/۴^۲}{۱۲} = ۴۶/۹۸$$

$$SS_e = SS_T - SS_S = ۴۶/۹۸ - ۴۵/۷۳ = ۱/۲۵$$

منبع تغییرات	SS	df	MS	F
بین ستونها (رژیم)	۴۵/۱۰۵	۲	۲۲/۵۵۳	
بین سطرها (دارو)	۰/۳۳۵	۱	۰/۳۳۵	
اثر متقابل	۰/۲۹	۲	۰/۱۴۵	$\frac{۰/۱۴۵}{۰/۲۰۸} = ۰/۷۰ < F_{/۹۵}(۲,۶) = ۵/۱۴$
داخل گروهها (اشتباه)	۱/۲۵	۶	۰/۲۰۸	
جمع	۴۶/۹۸	۱۱		

بنابراین اثر متقابل معنی‌دار نمی‌باشد لذا بهتر است برای بررسی اثر رژیم و دارو از برآورد ترکیبی که به صورت زیر بدست می‌آید استفاده کنیم.

$$\frac{SS_I + SS_e}{(c-۱)(r-۱)+rc(n-۱)} = \frac{۰/۲۹+۱/۲۵}{۲+۶} = ۰/۱۹$$

اثر ستونها (رژیم): $F = \frac{۲۲/۵۵۳}{۰/۱۹} = ۱۱۸/۷۰ > F_{/۹۵}(۲,۸) = ٤/٤٦$

اثر سطرها (دارو): $F = \frac{۰/۳۳۵}{۰/۱۹} = ۱/۷٦ < F_{/۹۵}(۱,۸) = ۵/۳۲$

بنابراین رژیم غذایی اثر معنی‌داری در افزایش وزن موشها داشته در حالیکه نوع دارو اثر معنـی‌داری را نشان نمی‌دهد.

ب) بله- در این حالت $s_e^۲, s_I^۲, s_r^۲$ هر سه برآورد نـاتور از واریـانس اشـتباه یعنـی $(\sigma^۲)$ بـوده لـذا برآورد ترکیبی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{SS_r + SS_I + SS_e}{(r-۱)+(c-۱)(r-۱)+rc(n-۱)} = \frac{۰/۳۳۵+۰/۲۹+۱/۲۵}{۱+۲+٦} = \frac{۱/۸۷۵}{۹} = ۰/۲۰۸$$

اثر ستونها (رژیم): $F = \frac{۲۲/۵۵۳}{۰/۲۰۸} = ۱۰۸/٤۳ > F_{/۹۵}(۲,۹) = ٤/۲٦$

پاسخ ۷-۹:

$$\chi^۲ = \frac{۱۲ \times \sum ni\left(\overline{R}_i - \frac{n+۱}{۲}\right)^۲}{n(n+۱)}, \quad \frac{n+۱}{۲} = \frac{۵۷۰+۱}{۲} = ۲۸۵/۵$$

$$\chi^۲ = \frac{۱۲ \times \left[۲٦۵ \times (۲۷۲/۵۹ - ۲۸۵/۵)^۲ + \ldots + ۱۳ \times (۳۹۵/۱۲ - ۲۸۵/۵)^۲\right]}{۵۷۰ \times ۵۷۱} = ۹/٤$$

به دلیل محدودیت رتبه‌ها اعداد تکراری قابل توجه است لذا لازم است ضریب تصحیح نیز محاسبه شود.

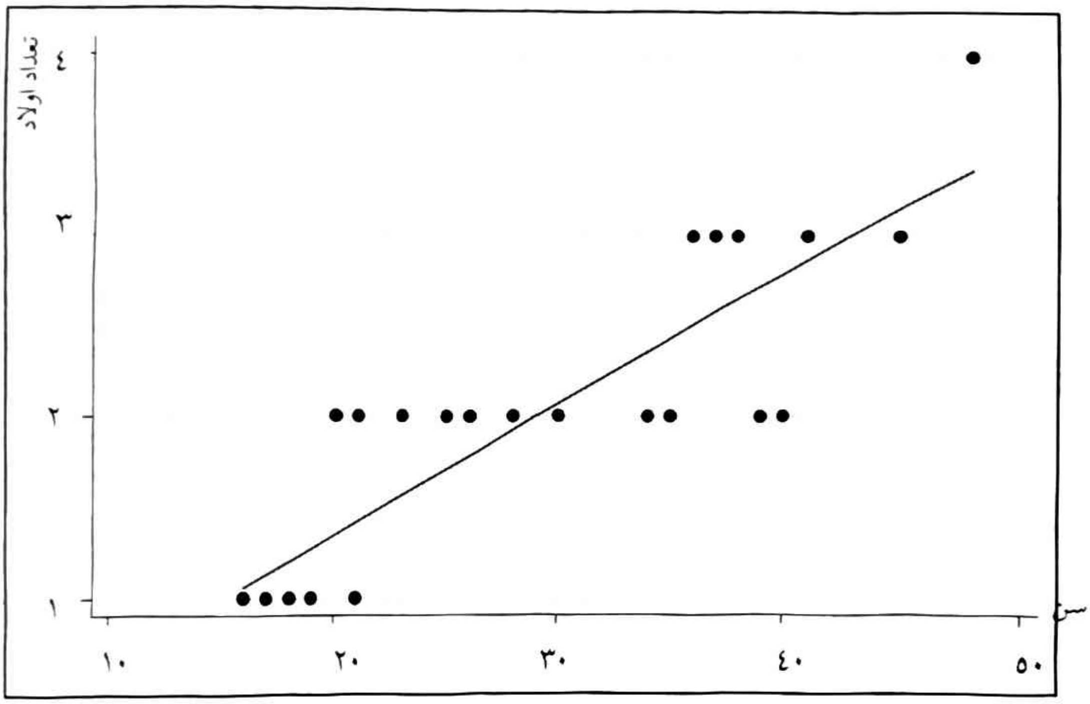
$$f = ۱ - \frac{\sum_{i=۱}^{t} t_i(t_i-۱)(t_i+۱)}{n(n-۱)(n+۱)} = ۱ - \frac{۵۲۵ \times (۵۲٤) \times (۵۲٦) + ۱۰ \times (۹) \times (۱۱) + ۳۵ \times (۳٤) \times ۳٦}{۵۷۰ \times ۵٦۹ \times ۵۷۱} = ۰/۲۲$$

مقدار $\chi^۲$ پس از اعمال تصحیح f برابر است با:

تصحیح شده $\chi^۲ = \frac{۹/٤}{۰/۲۲} = ٤۲/۷۳ > \chi^۲_{/۹۵}(۳) = ۷/۸۱$

بنابراین فرضیهٔ برابری میانگین رتبه‌ها در چهار گروه سنی رد می‌شود.

پاسخ ۸-۱:



ب)

$$\sum X = ۸۹۸ \qquad \overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{۸۹۸}{۳۰} = ۲۹/۹۳$$

$$\sum X = ۸۹۸ \qquad \overline{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{۶۲}{۳۰} = ۲/۰۷$$

$$\sum Y = ۶۲$$

$$\sum Y^{۲} = ۱۴۶$$

$$\sum XY = ۲۰۴۱ \qquad r = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\left[n\sum X^{۲} - (\sum X)^{۲}\right]\left[n\sum Y^{۲} - (\sum Y)^{۲}\right]}}$$

$$r = \frac{۳۰ \times ۲۰۴۱ - ۸۹۸ \times ۶۲}{\sqrt{\left[۳۰ \times ۲۹۴۳۴ - ۸۹۸^{۲}\right]\left[۳۰ \times ۱۴۶ - ۶۲^{۲}\right]}} = ۰/۸۷$$

ج)

$$\mu_{y.x} = A + Bx$$

$$b = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{n\sum X^{۲} - (\sum X)^{۲}} = \frac{۳۰ \times ۲۰۴۱ - ۸۹۸ \times ۶۲}{۳۰ \times ۲۹۴۳۴ - ۸۹۸^{۲}} = ۰/۰۷۲$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} = ۲/۰۷ - ۰/۰۷۲ \times ۲۹/۹۳ = -۰/۰۸$$

$$\overline{Y}_X = -۰/۰۸ + ۰/۰۷۲X$$

د)

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases} \qquad r = 0/87 \xrightarrow[\text{VIII}]{\text{جدول}} \omega = 1/33$$

$$z = \frac{\omega - 0}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} = \frac{1/33 - 0}{\frac{1}{\sqrt{30-3}}} = 6/91 > z_{0/975} = 1/96$$

بنابراین فرضیهٔ H_0 رد می‌شود و بین Y,X همبستگی معنی‌داری وجود دارد.

$$\begin{cases} H_0 : B = 0 \\ H_1 : B \neq 0 \end{cases}$$

$$t = \frac{bs_x\sqrt{n-1}}{s_{y.x}} = \frac{0/072 \times 9/38 \times \sqrt{29}}{0/4} = 9/10 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) = t_{0/975}(28) = 2/048$$

بنابراین باز هم فرضیه عدم بستگی در صنعت را مردود می‌شناسیم.

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum X^2 - (\sum X)^2/n\right] = \frac{1}{29}\left[29434 - \frac{818^2}{30}\right] = 88/06, s_x = 9/38$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum Y^2 - (\sum Y)^2/n\right] = \frac{1}{29}\left[146 - \frac{62^2}{30}\right] = 0/62$$

$$s_{y.x}^2 = \frac{n-1}{n-2}\left(s_y^2 - b^2 s_x^2\right) = \frac{29}{28}\left(0/62 - 0/072^2 \times 88/06\right) = 0/16 \rightarrow s_{y.x} = 0/4$$

هـ)

$$\overline{Y}_X = a + bX$$

$$X = 35 \Rightarrow \overline{Y}_X = -0/08 + 0/072 \times 35 = 2/44$$

(حد بالا) $\mu_{Y.X} = \overline{Y}_X + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)S_{Y.X}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\overline{x}-x)^2}{(n-1)s_X^2}}$

$$= 2/44 + 2/048 \times 0/4 \times \sqrt{\frac{1}{30} + \frac{(35-29/93)^2}{29 \times 88/06}} = 2/44 + 0/17 = 2/61$$

(حد پایین) $\mu_{y.x} = 2/44 - 0/17 = 2/27$

و)

(حد بالا) $Y = \overline{Y}_X + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)S_{y.x}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X-\overline{X})^2}{(n-1)s_X^2}}$

$$= 2/44 \pm 2/048 \times 0/40 \times \sqrt{1 + \frac{1}{30} + \frac{(35-29/93)^2}{29 \times 88/06}} = 2/44 + 0/83 = 3/27$$

(حد پایین) $Y = 2/44 - 0/83 = 1/61$

پاسخ ۸-٤: الف) اطلاعات ۷ سال منطقه جمع‌آوری شده که در هر سال هـر دو صـفت میـزان بارنـدگی و محصول پنبه را می‌توان تصادفی فرض کرد.

پاسخ به سایر قسمت‌های تمرین مانند تمرین‌های قبل است.

پاسخ ۸-۸:

ابتدا درصدها را به اعداد تبدیل کنید و براساس این اعداد ملاک آزمون به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\chi^{۲} = \sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۱}^{۳}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^{۲}}{e_{ij}} = \frac{(٤-٥/٨)^{۲}}{٥/٨}+\ldots+\frac{(۷-۱۷/۲)^{۲}}{۱۷/۲} = ۱٥/٦۲ > \chi^{۲}_{./۹٥}(۲) = ٥/۹۹$$

بنابراین بین تعداد دفعات حاملگی و تعداد فرزندان خواسته ارتباط معنی‌دار وجود دارد.

پاسخ ۸-۹: با توجه به کوچک بودن فراوانی‌های مورد انتظار از آزمون دقیق فیشر استفاده می‌شود.

	بهبودی		جمع
دارو	+	−	
A	٤	۱	٥
B	۲	۳	٥
جمع	٦	٤	۱۰

نسبت بهبودی در بیمارانی که با داروی A درمان شده‌اند برابر $\frac{٤}{٥}$ و در بیمارانی که با داروی B درمان شده‌اند. برابر $\frac{۲}{٥}$ می‌باشد در آزمون یک دامنه (فرضیه مقابل برتری داروی A نسبت به داروی B می‌باشد) موثر بودن داروی A هنگامی ثابت می‌شود که نسبت بهبودی در گروه A به طـور معنـی‌داری از گـروه B بیشـتر باشد. در این تمرین علاوه بر جدول فوق یعنی مشاهده ٤ بهبودی در ٥ نفر تنها حالتی که بـا ثابـت در نظـر گرفتن حاشیه‌ها می‌تواند اختلافی بیشتری در جهت رد فرضیه صفر نشان دهد این اسـت کـه هـر ٥ نفـر بـا داروی A بهبود یابند (جدول زیر).

	بهبودی		جمع
دارو	+	−	
A	٥	۰	٥
B	۱	٤	٥
جمع	٦	٤	۱۰

احتمال دو جدول فوق با استفاده از توزیع فوق هندسی به شرح زیر مشاهده می‌شود:

$$P(٤ \le n_{١١} \le ٥) = P(n_{١١} = ٤) + P(n_{١١} = ٥)$$

$$= \frac{\binom{٥}{٤}\binom{٥}{٢}}{\binom{١٠}{٦}} + \frac{\binom{٥}{٥}\binom{٥}{١}}{\binom{١٠}{٦}}$$

$$= \frac{٥ \times ١٠}{٢١٠} + \frac{١ \times ٥}{٢١٠} = \frac{٥٥}{٢١٠} = ٠/٢٦ > ٠/٠٥$$

در آزمون دو دامنه می‌بایست دو برابر P بدست آمده (۲×۰/۲٦=۰/۵۲) را با α =۰/۰۵ مقایسه کرده از آنجا که ۰/۵۲ بزرگتر از ۰/۰۵ است بنابراین فرضیه H_0 رد نمی‌شود.

پاسخ ۹-۲: گروه سنی ۱٤-۰

(میزان مرگ خام) $\lambda_١ = \frac{d_١}{T_١} \times ١٠٠٠ = \frac{٧٧}{٢٤١٣٩} \times ١٠٠٠ = ٣/١٩$

$$SE(Ln\lambda_١) = \frac{١}{\sqrt{d_١}} = \frac{١}{\sqrt{٧٧}} = ٠/١١ \;,\; EF = \exp\left(z_{١-\frac{\alpha}{٢}} SE(Ln\hat{\lambda}_١)\right) \exp(١/٩٦ \times ٠/١١) = ١/٢٤$$

حدود اعتماد ۹۵ درصد برای $\lambda_١$: $\frac{\lambda_١}{EF}, \lambda_١ \times EF$

حدود اعتماد ۹۵ درصد برای $\lambda_١$: $\frac{٣/١٩}{١/٢٤}, ٣/١٩ \times ١/٢٤ = (٢/٥٧, ٣/٩٦)$

(میزان مرگ از بیماری‌های قلبی) $\lambda_٢ = \frac{d_٢}{T_٢} \times ١٠٠٠ = \frac{٦}{٢٤١٣٩} \times ١٠٠٠ = ٠/٢٥$

$$SE(Ln\hat{\lambda}_٢) = \frac{١}{\sqrt{d_٢}} = \frac{١}{\sqrt{٦}} = ٠/٤١$$

$$EF = \exp\left(z_{١-\frac{\alpha}{٢}} SE(Ln\lambda_٢)\right) \exp(١/٩٦ \times ٠/٤١) = ٢/٢٣$$

حدود اعتماد ۹۵ درصد برای $\lambda_٢$: $\frac{\hat{\lambda}}{EF}, \hat{\lambda}_٢ \times EF$

حدود اعتماد ۹۵ درصد برای $\lambda_٢$: $\frac{٠/٢٥}{٢/٢٣}, ٠/٢٥ \times ٢/٢٣ = (٠/١١, ٠/٥٦)$

و به همین ترتیب حدود اعتمادهای زیر محاسبه شده‌اند.

(میزان مرگ از بیماری‌های عفونی): $\lambda_٣ = ٢/١١$ ، حدود اعتماد ۹۵ درصد برای $\lambda_٣$: (۱/٦۰و ۲/۷۹)

(میزان مرگ خام): $\lambda'_١ = ٧/٩٥$ ، حدود اعتماد ۹۵ درصد برای $\lambda'_١$: (٦/۲٦و۱۰/۱۰)

(میزان مرگ از بیماریهای قلبی): $\lambda'_٢ = ٢/٥٧$ ، حدود اعتماد ۹۵ درصد برای $\lambda'_٢$: (۱/٦۷و۳/۹٦)

(میزان مرگ از بیماری‌های عفونی): $\lambda'_٣ = ٠/٣٧$ ، حدود اعتماد ۹۵ درصد برای $\lambda'_٣$: (۰/۱۲و۱/۱۵)

به طور کلی میزان مرگ خام و میزان مرگ اختصاصی از بیماریهای قلبی در میانسالان از کودکان و نوجوانان بیشتر است لیکن میزان مرگ اختصاصی از بیماری‌های عفونی برعکس می‌باشد.

پاسخ ۹-۳: الف) جدول زیر توزیع فراوانی نسبی (درصد) جمعیت در گروههای سنی را در مناطق روستایی و شهری مقایسه می کند. همانطور که مشاهده می کنیم در جامعه روستایی نسبت کودکان و افراد مسن بیشتر بوده و این در حالی است که افراد جوان در جامعه شهری تا حدودی بالاتر از جامعه روستایی می باشد.

گروه سنی	روستا				شهر			
	جمعیت (تعداد)	جمعیت (درصد)	موارد مرگ	میزان مرگ اختصاصی	جمعیت (تعداد)	جمعیت (درصد)	موارد مرگ	میزان مرگ اختصاصی
۰-۴	۲۶۲۸۴	۱۶/۶	۱۰۵۳	۴۰/۱	۱۸۴۷۵	۱۲/۶	۳۰۱	۱۶/۳
۵-۹	۲۶۴۳۴	۱۶/۷	۵۰	۱/۹	۲۱۶۰۳	۱۴/۸	۲۰	۰/۹
۱۰-۱۴	۲۱۸۰۲	۱۳/۸	۱۷	۰/۸	۲۲۵۸۹	۱۵/۵	۷	۰/۳
۱۵-۱۹	۱۶۱۴۵	۱۰/۲	۲۸	۱/۷	۱۸۵۷۱	۱۲/۷	۱۲	۰/۶
۲۰-۲۴	۱۱۳۹۹	۷/۲	۲۳	۲/۰	۱۳۱۹۱	۹/۰	۱۸	۱/۴
۲۵-۲۹	۸۳۹۵	۵/۳	۱۶	۱/۹	۹۱۷۵	۶/۳	۹	۱/۰
۳۰-۳۴	۷۸۴۲	۵/۰	۲۰	۲/۶	۸۱۱۷	۵/۶	۱۳	۱/۶
۳۵-۳۹	۸۰۰۱	۵/۱	۲۳	۲/۹	۷۹۲۲	۵/۴	۱۷	۲/۱
۴۰-۴۴	۷۶۱۸	۴/۸	۲۷	۳/۵	۷۵۶۱	۵/۲	۱۹	۲/۵
۴۵-۴۹	۶۱۶۵	۳/۹	۲۱	۳/۴	۵۷۰۵	۳/۹	۲۷	۴/۷
۵۰-۵۴	۵۲۱۸	۳/۳	۶۴	۱۲/۳	۵۱۴۳	۳/۵	۵۳	۱۰/۳
۵۵-۵۹	۲۹۵۱	۱/۹	۲۱	۷/۱	۲۲۵۴	۱/۵	۳۲	۱۴/۲
۶۰-۶۴	۳۶۶۸	۲/۳	۵۸	۱۵/۸	۲۵۹۷	۱/۸	۶۴	۲۴/۶
۶۵-۶۹	۲۱۳۸	۱/۴	۴۱	۱۹/۲	۱۱۲۹	۰/۸	۳۷	۳۲/۸
۷۰ +	۴۰۶۴	۲/۶	۱۲۶	۳۱/۰	۲۰۸۴	۱/۴	۲۵۷	۱۲۳/۳
جمع	۱۵۸۱۲۴	۱۰۰/۰	۱۵۸۸	۱۰/۰	۱۴۶۱۱۶	۱۰۰/۰	۸۸۶	۶/۱

ب)

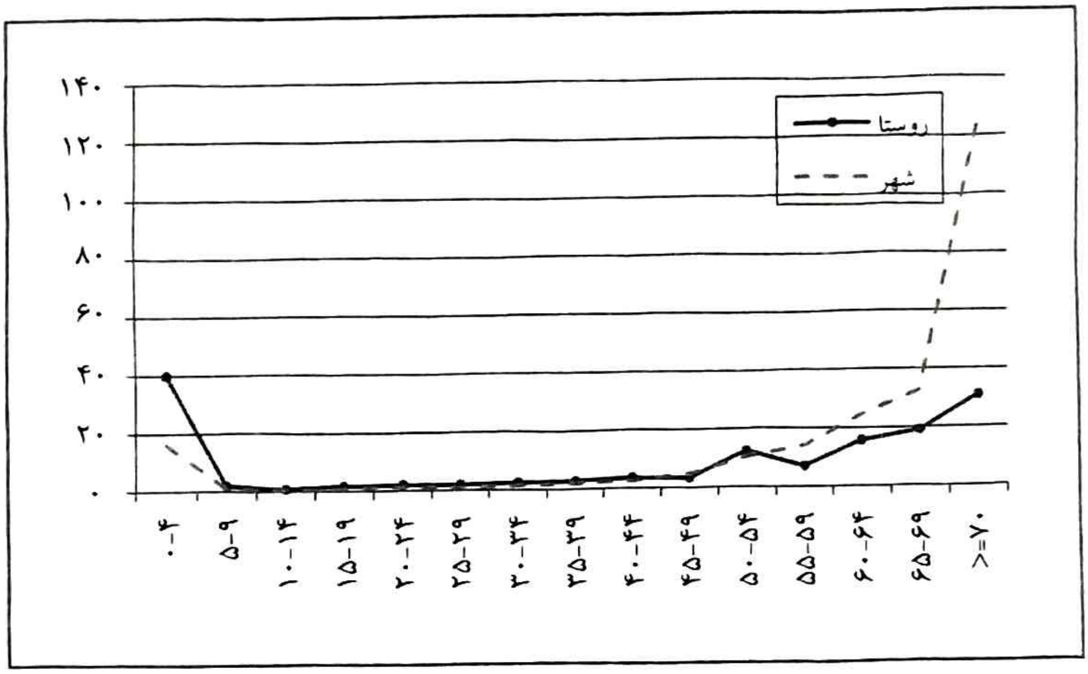
میزان مرگ خام در جامعه شهری: $\frac{۸۸۶}{۱۴۶۱۱۶}\times ۱۰۰۰ = ۶/۱$

میزان مرگ خام در جامعه: $\frac{۱۵۸۸}{۱۵۸۱۲۴}\times ۱۰۰۰ = ۱۰/۰$

با مقایسه مرگ خام به نظر می رسد که مقدار این میزان در روستا بیشتر از شهر می باشد.

ج) در جدول محاسبه شده است.

د)



با توجه به نمودار فوق میزان مرگ در کودکان روستا بیشتر از کودکان شهری است این در حالی است که میزان مرگ در افراد مسن به طور چشمگیری در جمعیت شهری بالاتر می باشد.

هـ)

گروه سنی	میزان مرگ اختصاصی		جمعیت	مرگهای منتظره	
	R_{ij} روستا (۱)	R_{ij} شهر (۲)	شهر و روستا (۳)	D_{ij} روستا (۳×۱)	D_{ij} شهر (۳×۲)
۰-٤	٤۰/۱	۱٦/۳	٤٤۷٥۹	۱۷۹۳/۱٥	۷۲۹/۲۳
٥-۹	۱/۹	۰/۹	٤۸۰۳۷	۹۰/۸٦	٤٤/٤۷
۱۰-۱٤	۰/۸	۰/۳	٤٤۳۹۱	۳٤/٦۱	۱۳/۷٦
۱٥-۱۹	۱/۷	۰/٦	۳٤۷۱٦	٦۰/۲۱	۲۲/٤۳
۲۰-۲٤	۲/۰	۱/٤	۲٤٥۹۰	٤۹/٦۲	۳۳/٥٥
۲٥-۲۹	۱/۹	۱/۰	۱۷٥۷۰	۳۳/٤۹	۱۷/۲۳
۳۰-۳٤	۲/٦	۱/٦	۱٥۹٥۹	٤۰/۷۰	۲٥/٥٦
۳٥-۳۹	۲/۹	۲/۱	۱٥۹۲۳	٤٥/۷۷	۳٤/۱۷
٤۰-٤٤	۳/٥	۲/٥	۱٥۱۷۹	٥۳/۸۰	۳۸/۱٤

۴۵–۴۹	۳/۴	۴/۷	۱۱۸۷۰	۴۰/۴۳	۵۶/۱۸
۵۰–۵۴	۱۲/۳	۱۰/۳	۱۰۳۶۱	۱۲۷/۰۸	۱۰۶/۷۷
۵۵–۵۹	۷/۱	۱۴/۲	۵۲۰۵	۳۷/۰۴	۷۳/۹۰
۶۰–۶۴	۱۵/۸	۲۴/۶	۶۲۶۵	۹۹/۰۶	۱۵۴/۳۹
۶۵–۶۹	۱۹/۲	۳۲/۸	۳۲۶۷	۶۲/۶۵	۱۰۷/۰۷
۷۰+	۳۱/۰	۱۲۳/۳	۶۱۴۸	۱۹۰/۶۱	۷۵۸/۱۷
جمع	۱۰/۰	۶/۱	۳۰۴۲۴۰	۲۷۵۹/۰۹	۲۲۱۵/۰۳

$$\text{(روستا)}\ R_{s_1}=\frac{\sum D_{1i}}{P_s}\times \text{۱۰۰۰}=\frac{\text{۲۷۵۹/۰۹}}{\text{۳۰۴۲۴۰}}\times \text{۱۰۰۰}=\text{۹/۰۷}$$

$$\text{(شهر)}\ R_{s_2}=\frac{\sum D_{2i}}{P_s}\times \text{۱۰۰۰}=\frac{\text{۲۲۱۵/۰۳}}{\text{۳۰۴۲۴۰}}\times \text{۱۰۰۰}=\text{۷/۲۸}$$

میزان مرگ خام روستاها ۱/۶۴ برابر شهرها بوده $\left(\frac{\text{۱۰/۰}}{\text{۶/۱}}=\text{۱/۶۴}\right)$، در صورتیکه پس از تطبیق و از بین بردن اختلاف ناشی از توزیع سنی این نسبت به $\frac{\text{۹/۰۷}}{\text{۷/۲۸}}=\text{۱/۲۵}$ کاهش یافته است.

پاسخ ۹-۴: الف)

	مرد		زن		شیوع		جمعیت	مرگهای منتظره	
گروه‌های سنی	بیمار	جمعیت	بیمار	جمعیت	مرد	زن	مرد و زن	مرد	زن
کمتر از ۲۰	۷۰	۱۷۳۴	۶۹	۱۶۵۶	۰/۰۴۰	۰/۰۴۲	۳۳۹۰	۱۳۶/۸۵	۱۴۱/۲۵
۲۰–۳۹	۱۳	۵۰۱	۱۲	۶۵۷	۰/۰۲۶	۰/۰۱۸	۱۱۵۸	۳۰/۰۵	۲۱/۱۵
۴۰–۵۹	۲۱	۳۷۵	۲۵	۳۸۲	۰/۰۵۶	۰/۰۶۵	۷۵۷	۴۲/۳۹	۴۹/۵۴
جمع	۱۰۴	۲۶۱۰	۱۰۶	۲۶۹۵			۵۳۰۵	۲۰۹/۲۹	۲۱۱/۹۴

$$R_{s_1}=\frac{\sum D_{1i}}{P_s}\times \text{۱۰۰۰}=\frac{\text{۲۰۹/۲۹}}{\text{۵۳۰۵}}\times \text{۱۰۰۰}=\text{۳۹/۴۵}$$

$$R_{s_2}=\frac{\sum D_{2i}}{P_s}\times \text{۱۰۰۰}=\frac{\text{۲۱۱/۹۴}}{\text{۵۳۰۵}}\times \text{۱۰۰۰}=\text{۳۹/۹۵}$$

ب)

گروه سنی	O_i	E_i	$V_i = \frac{n_{i1}n_{i2}c_{i1}c_{i2}}{n_i^2(n_i-1)}$
کمتر از ۲۰	۷۰	۷۱/۱۰	۳۳/۳۲
۳۹-۲۰	۱۳	۱۰/۸۲	۶/۰۱
۵۹-۴۰	۲۱	۲۲/۷۹	۱۰/۸۱
جمع	۱۰۴	۱۰۴/۷۱	۵۰/۱۴

$$\chi^2_{MH} = \frac{(\sum D_i - \sum E_i)^2}{\sum V_i} = \frac{(۱۰۴ - ۱۰۴/۷۱)^2}{۵۰/۱۴} = ۰/۰۱ \qquad ۰/۱ < ۳/۸۴$$

بنابراین اختلاف میزان شیوع بین مرد و زن معنی‌دار نیست.

ج)

گروه سنی کمتر از ۲۰ $$z_1 = \frac{\left(\frac{۷۰}{۱۷۳۴} - ۰/۰۵\right)}{\sqrt{\frac{۰/۰۵ \times (۱ - ۰/۰۵)}{۱۷۳۴}}} = -۱/۸۴$$

گروه سنی ۳۹-۲۰ $$z_2 = \frac{\left(\frac{۱۳}{۵۰۱} - ۰/۰۱\right)}{\sqrt{\frac{۰/۰۱ \times (۱ - ۰/۰۱)}{۵۰۱}}} = ۳/۵۹$$

گروه سنی ۵۹-۴۰ $$z_3 = \frac{\left(\frac{۲۱}{۳۷۵} - ۰/۱۰\right)}{\sqrt{\frac{۰/۱ \times (۱ - ۰/۱)}{۳۷۵}}} = -۲/۸۴$$

$$z = \frac{\sum z_i}{\sqrt{g}} = \frac{-۱/۸۴ + ۳/۵۹ - ۲/۸۴}{\sqrt{۳}} = -۰/۶۳ \qquad |-۰/۶۳| < ۱/۹۶$$

میزان شیوع نسبی مردان با میزانهای فرض اختلاف معنی‌دار ندارد.

پاسخ ۹-۵:

گروههای سنی	مرد		زن		مجموع		شیوع معیار	مرگهای منتظره	
	بیمار	جمعیت	بیمار	جمعیت	بیمار	جمعیت		مرد	زن
کمتر از ۲۰	۷۰	۱۷۳۴	۶۹	۱۶۵۶	۱۳۹	۳۳۹۰	۰/۰۴۱	۷۱/۱۰	۶۷/۹۰
۳۹-۲۰	۱۳	۵۰۱	۱۲	۶۵۷	۲۵	۱۱۵۸	۰/۰۲۲	۱۰/۸۲	۱۴/۱۸
۵۹-۴۰	۲۱	۳۷۵	۲۵	۳۸۲	۴۶	۷۵۷	۰/۰۶۱	۲۲/۷۹	۲۳/۲۱
	۱۰۴	۲۶۱۰	۱۰۶	۲۶۹۵	۲۱۰	۵۳۰۵		۱۰۴/۷۰	۱۰۵/۳۰

مرد : $D_۱ = \sum R_i n_{۱i} = ۷۱/۱۰ + ۱۰/۸۲ + ۲۲/۷۹ = ۱۰۴/۷۰, \sum d_{۱i} = ۱۰۴$

$SMR_۱ = \frac{۱۰۴}{۱۰۴/۷۰} = ۰/۹۹$ $\qquad SE(Ln SMR) = \frac{۱}{\sqrt{۱۰۴}} = ۰/۰۹۸$

$EF = \exp(۱/۹۶ \times ۰/۰۹۸) = ۱/۲۱$

$SMR_۱$ حدود اعتماد ۹۵٪ برای : $\frac{۰/۹۹}{۱/۲۱}, ۰/۹۹ \times ۱/۲۱ = (۰/۸۲, ۱/۲۰)$

زن : $D_۲ = \sum R_i n_{۲i} = ۶۷/۹۰ + ۱۴/۱۸ + ۲۳/۲۱ = ۱۰۵/۳۰, \sum d_{۲i} = ۱۰۶$

$SMR_۲ = \frac{۱۰۶}{۱۰۵/۳۰} = ۱/۰۱$ $\qquad SE(Ln SMR_۲) = \frac{۱}{\sqrt{۱۰۶}} = ۰/۰۹۷$

$EF = \exp(۱/۹۶ \times ۰/۰۹۷) = ۱/۲۱$

$SMR_۲$ حدود اعتماد ۹۵ درصد برای : $\frac{۱/۰۱}{۱/۲۱}, ۱/۰۱ \times ۱/۲۱ = (۰/۸۳, ۱/۲۲)$

پاسخ ۱۰-۲: الف)

$$OR = \frac{ad}{bc} = \frac{۳۲ \times ۱۰۴۸}{۵۶ \times ۸۲۵} = ۰/۷۳$$

$$SE(Ln\ OR) = \sqrt{\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{d}} = \sqrt{\frac{۱}{۳۲} + \frac{۱}{۸۲۵} + \frac{۱}{۵۶} + \frac{۱}{۱۰۴۸}} = ۰/۲۲۶$$

$$EF = \exp(۱/۹۶ \times ۰/۲۲۶) = ۱/۵۶$$

OR حدود اعتماد $(۱-\alpha)$ درصد برای : $\frac{OR}{EF}, OR \times EF$

OR حدود اعتماد ۹۵ درصد برای : $\frac{۰/۷۳}{۱/۵۶}, ۰/۷۳ \times ۱/۵۶ = (۰/۴۷, ۱/۱۴)$

ب) چون حدود اعتماد عدد ۱ را در برگرفته نمی‌توان فرضیهٔ $H_۰$ را مردود دانست. می‌توان از طریق آزمون مقایسهٔ دو نسبت (ملاک z یا $\chi^۲$) و آزمون برابری OR با عدد ۱ نیز به این سوال پاسخ داد.

پاسخ ۱۰-۳:

(نسبت مراجعه در گروه بیمار) $p_۲ = ۰/۱۰$ ، $RR = ۱/۸$ ، $\alpha = \beta = ۰/۱۰$ ، $n = ?$

برای محاسبه حجم نمونه باید با استفاده از فرمول زیر $p_۱$ (نسبت مراجعه در افراد سالم) را بدست آوریم:

$$RR \simeq OR = \frac{\frac{p_۲}{۱-p_۲}}{\frac{p_۱}{۱-p_۱}} \rightarrow ۱/۸ = \frac{\frac{۰/۱}{۰/۹}}{\frac{p_۱}{۱-p_۱}} = \frac{۱-p_۱}{۹p_۱} \rightarrow ۱۶/۲p_۱ = ۱-p_۱$$

$$۱۷/۲p_۱ = ۱ \rightarrow p_۱ = ۰/۰۶$$

$$\bar{p} = \frac{۰/۱ + ۰/۰۶}{۲} = ۰/۰۸$$

$$n=\frac{۲(z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}+z_{۱-\beta})^{۲}\times\bar{p}(۱-\bar{p})}{(p_{۲}-p_{۱})^{۲}}=\frac{۲\times(۱/۶۴+۱/۲۸)^{۲}\times۰/۰۸\times(۱-۰/۰۸)}{(۰/۱-۰/۰۶)^{۲}}\simeq۷۸۵$$

الف)

ابتد با ادغام جداول شرطی ۲×۲ جدول حاشیه‌ای زیر را برای محاسبهٔ OR کلی یا DR_{crude} تشکیل می‌دهیم:

	مورد	شاهد
بزرگتر از ۲۵۰۰ کیلوکالری	۱۹۰	۲۶۶
کمتر از ۲۵۰۰ کیلوکالری	۱۷۶	۱۵۷

$$OR_{crude}=\frac{۱۹۰\times۱۵۷}{۲۶۶\times۱۷۶}=۰/۶۴$$

هرگز سیگار نکشیده : $OR_{۱}=\frac{۴۱\times۵۲}{۸۴\times۴۶}=۰/۵۵$

ترک کرده : $OR_{۲}=\frac{۶۳\times۶۵}{۱۱۴\times۵۱}=۰/۷۰$

ادامه دارد : $OR_{۳}=\frac{۸۶\times۴۰}{۶۸\times۷۹}=۰/۶۴$

ب)

$$OR_{MH}=\frac{\sum\frac{a_id_i}{n_i}}{\sum\frac{b_ic_i}{n_i}}=\frac{\frac{۴۱\times۵۲}{۲۲۳}+\frac{۶۳\times۶۵}{۲۹۳}+\frac{۸۶\times۴۰}{۲۷۳}}{\frac{۸۴\times۴۶}{۲۲۳}+\frac{۱۱۴\times۵۱}{۲۹۳}+\frac{۶۸\times۷۹}{۲۷۳}}=\frac{۳۶/۱۴}{۵۶/۸۵}=۰/۶۴$$

$$V=\sum V_i=\sum\frac{n_{i۱}n_{i۲}c_{i۱}c_{i۲}}{ni^{۲}(ni-۱)}=\frac{۸۷\times۱۳۴\times۱۲۵\times۹۸}{۲۲۳^{۲}\times۲۲۲}+\frac{۱۱۴\times۱۷۹\times۱۷۷\times۱۱۶}{۲۹۳^{۲}\times۲۹۲}+\frac{۱۶۵\times۱۰۸\times۱۵۴\times۱۱۹}{۲۷۳^{۲}\times۲۷۲}$$

$$V=۱۲/۹۴+۱۶/۷۱+۱۶/۱۱=۴۵/۷۶$$

$$SE(\text{Ln OR})=\sqrt{\frac{V}{Q\times R}}=\sqrt{\frac{۴۵/۷۶}{۳۶/۱۴\times۵۶/۸۵}}=۰/۱۴۹$$

$$EF=\exp(۱/۹۶\times۰/۱۴۹)=۱/۳۴$$

حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR_{MH} : $\frac{OR_{MH}}{EF},OR_{MH}\times EF$

حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR_{MH} : $\frac{۰/۶۴}{۱/۳۴},۰/۶۴\times۱/۳۴=(۰/۴۸,۰/۸۶)$

ج) بررسی رابطهٔ فعالیت بدنی و بروز انفارکتوس میوکارد را می‌توان هم از طریق آزمون کای دو و هم محاسبه حدود اعتماد برای OR انجام داد که در ادامه به وسیلهٔ محاسبهٔ حدود اعتماد به بررسی ارتباط پرداخته شده است.

$$OR_{۱}=۰/۵۵$$

$$SE(\text{Ln }OR_{۱})=\sqrt{\frac{۱}{۴۱}+\frac{۱}{۸۴}+\frac{۱}{۴۶}+\frac{۱}{۵۲}}=۰/۲۷۸,EF=\exp(۱/۹۶\times۰/۲۷۸)=۱/۷۲$$

$\frac{\cdot/\text{۵۵}}{\text{۱}/\text{۷۲}}, \cdot/\text{۵۵}\times \text{۱}/\text{۷۲} = (\cdot/\text{۳۲}, \cdot/\text{۹۵})$: حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR_1

$OR_2 = \cdot/\text{۷}$ $(\cdot/\text{۴۳}, \text{۱}/\text{۱۳})$: حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR_2

$OR_3 = \cdot/\text{۶۴}$ $(\cdot/\text{۳۹}, \text{۱}/\cdot\text{۵})$: حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR_3

$OR_{crude} = \cdot/\text{۶۴}$

$$SE(\text{Ln } OR_{crude}) = \sqrt{\frac{1}{190}+\frac{1}{266}+\frac{1}{176}+\frac{1}{157}} = \cdot/\text{۱۴۵}, EF = \exp(\text{۱}/\text{۹۶}\times\cdot/\text{۱۴۵}) = \text{۱}/\text{۳۳}$$

$\frac{\cdot/\text{۶۴}}{\text{۱}/\text{۳۳}}, \cdot/\text{۶۴}\times \text{۱}/\text{۳۳} = (\cdot/\text{۴۸}, \cdot/\text{۸۵})$: حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR_{crude}

بنابراین گواه کافی مبنی بر وجود رابطه در گروه اول و در کل وجود دارد.

به علت همگن بودن مقادیر OR در طبقات بر حسب سیگار به نظر می‌رسد استفاده از یک OR کلی مناسب باشد. از آنجا که OR_{crude} و OR_{MH} مقادیر مشابهی دارند و با توجه به کوچکتر بودن مقدار خطای معیار OR_{crude} (۰/۱۴۵) نسبت به OR_{MH} (۰/۱۴۹) بهتر است در گزارش نتایج OR_{crude} ارائه نشود.

پاسخ ۱۰-۶: الف) محاسبه حجم نمونه

$\alpha = \cdot/\cdot\text{۵}, RR = \text{۲}$

(میزان دفع خود به خودی IUD استاندارد) $p_1 = \cdot/\text{۱۰} \xrightarrow{RR=2} p_2 = \text{۲}\times\cdot/\text{۱} = \cdot/\text{۲}$

(میزان حاملگی SUDاستاندارد) $p_1^* = \cdot/\cdot\text{۴} \xrightarrow{RR=2} p_2^* = \text{۲}\times\cdot/\cdot\text{۴} = \cdot/\cdot\text{۸}$

$$\bar{p} = \frac{p_1+p_2}{2} = \frac{\cdot/\text{۱۰}+\cdot/\text{۲}}{2} = \cdot/\text{۱۵} \quad , \quad \bar{p}^* = \frac{p_1^*+p_2^*}{2} = \frac{\cdot/\cdot\text{۴}+\cdot/\cdot\text{۸}}{2} = \cdot/\cdot\text{۶}$$

$$n = \frac{2\times(z_{1-\frac{\alpha}{2}}+z_{1-\beta})^2\times\bar{p}\times(1-\bar{p})}{(\bar{p}_2-\bar{p}_1)^2} = \frac{2\times(\text{۱}/\text{۹۶}+\cdot/\text{۸۴})^2\times\cdot/\text{۱۵}\times\cdot/\text{۸۵}}{(\cdot/\text{۱}-\cdot/\text{۱})^2} \simeq \text{۲۰۰}$$

$$n^* = \frac{2\times(\text{۱}/\text{۹۶}+\cdot/\text{۸۴})^2\times\cdot/\cdot\text{۶}\times(1-\cdot/\cdot\text{۶})}{(\cdot/\cdot\text{۸}-\cdot/\cdot\text{۴})^2} = \text{۵۵۳}$$

ب) محاسبه توان آزمون

$$n = \frac{2\times(z_{1-\frac{\alpha}{2}}+z_{1-\beta})^2\times\bar{p}\times(1-\bar{p})}{(p_2-p_1)^2} = \frac{2\times(\text{۱}/\text{۹۶}+z_{1-\beta})^2\times\cdot/\text{۱۵}\times\cdot/\text{۸۵}}{(\cdot/\text{۲}-\cdot/\text{۱})^2} = \text{۴۰۰}$$

$$(\text{۱}/\text{۹۶}+z_{1-\beta})^2 = \frac{\text{۴۰۰}\times(\cdot/\text{۲}-\cdot/\text{۱})^2}{2\times\cdot/\text{۱۵}\times\cdot/\text{۸۵}} = \text{۱۵}/\text{۷} \rightarrow \text{۱}/\text{۹۶}+z_{1-\beta} = \text{۳}/\text{۹۶} \rightarrow z_{1-\beta} = \text{۲}, 1-\beta = \cdot/\text{۹۷۷۲}$$

$$n^* = \frac{2\times(\text{۱}/\text{۹۶}+z_{1-\beta})^2\times\cdot/\cdot\text{۶}\times(1-\cdot/\cdot\text{۶})}{(\cdot/\cdot\text{۸}-\cdot/\cdot\text{۴})^2} = \text{۴۰۰} \rightarrow (\text{۱}/\text{۹۶}+z_{1-\beta})^2 = \frac{\text{۴۰۰}\times(\cdot/\cdot\text{۸}-\cdot/\cdot\text{۴})^2}{2\times\cdot/\cdot\text{۶}\times(1-\cdot/\cdot\text{۶})} = \text{۵}/\text{۶۷}$$

$$\text{۱}/\text{۹۶}+z_{1-\beta} = \text{۲}/\text{۳۸} \ , \ z_{1-\beta} = \cdot/\text{۴۲} \ , \ 1-\beta = \cdot/\text{۶۶}$$

پاسخ ۱۰-۸: الف) مطالعه مورد- شاهدی جور شده

ب)

$$\chi^{۲} = \frac{(b-c)^{۲}}{b+c} = \frac{(۱۱-۳)^{۲}}{۱۱+۳} = \frac{۶۴}{۱۴} = ۴/۵۷ > \chi^{۲}_{۰/۰۵}(۱) = ۳/۸۴$$

بنابراین گواه کافی مبنی بر رد فرضیهٔ صفر وجود دارد.

پاسخ ۱۰-۹: الف)

گروه زیر ۷ سال:

$$\chi^{۲} = \sum \frac{(n_{ij} - e_{ij})^{۲}}{e_{ij}} = \frac{(۱۷-۲۱/۲)^{۲}}{۲/۲۱} + \frac{(۸۶-۸۱/۸)^{۲}}{۸۱/۸} + \frac{(۵۲-۴۷/۸)^{۲}}{۴۷/۸} + \frac{(۱۸۰-۱۸۴/۲)^{۲}}{۱۸۴/۲} = ۱/۵۲ < ۳/۸۴$$

جنسیت		بیماری: دارد	ندارد	جمع
	دختر	۱۷	۸۶	۱۰۳
	پسر	۵۲	۱۸۰	۲۳۲
	جمع	۶۹	۲۶۶	۳۳۵

در گروه سنی زیر ۷ سال رابطهٔ جنس و ابتلا به شب ادراری معنی‌دار نمی‌باشد.

گروه بالای ۷ سال:

$$\chi^{۲} = \sum \frac{(n_{ij} - e_{ij})^{۲}}{e_{ij}} = \frac{(۹-۱۶/۳)^{۲}}{۱۶/۳} + \frac{(۱۰۷-۹۹/۷)^{۲}}{۹۹/۷} + \frac{(۲۸-۲۰/۷)^{۲}}{۲۰/۷} + \frac{(۱۲۰-۱۲۷/۳)^{۲}}{۱۲۷/۳} = ۶/۷ > ۳/۸۴$$

جنسیت		بیماری: دارد	ندارد	
	دختر	۹	۱۰۷	۱۱۶
	پسر	۲۸	۱۲۰	۱۴۸
		۳۷	۲۲۷	۲۶۴

در گروه سنی بالای ۷ سال رابطهٔ جنس و ابتلا به بیماری معنی‌دار می‌باشد.

ب)

گروه زیر ۷ سال:

$$OR = \frac{۱۷ \times ۱۸}{۵۲ \times ۸۶} = ۰/۸۶\ ,\ SE(\text{Ln } OR) = \sqrt{\frac{۱}{۱۷} + \frac{۱}{۸۶} + \frac{۱}{۵۲} + \frac{۱}{۱۸۰}} = ۰/۳۱, EF = \exp(۱/۹۶ \times ۰/۳۱) = ۱/۸۲$$

حدود اعتماد ۹۵ درصد برای OR: $\frac{۰/۶۸}{۱/۸۴}, ۰/۶۸ \times ۱/۸۴ = (۰/۳۷,۱/۲۵)$

گروه بالای ۷ سال:

$$OR=\frac{۹\times ۱۲۰}{۲۸\times ۱۰۷}=۰/۳۶\ ,\ SE(\text{Ln } OR)=\sqrt{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۰۷}+\frac{۱}{۲۸}+\frac{۱}{۱۲۰}}=۰/۴۱, EF=\exp(۱/۹۶\times ۰/۴۱)=۲/۲۳$$

$$OR \text{ حدود اعتماد ۹۵ درصد برای: } \frac{۰/۳۶}{۲/۲۳}, ۰/۳۶\times ۲/۲۳=(۰/۱۶,۰/۸۰)$$

ج)

$$\chi^۲=\sum\frac{(n_{ij}-e_{ij})^۲}{e_{ij}}=\frac{(۲۶-۳۸/۸)^۲}{۳۸/۸}+\frac{(۱۹۳-۱۸۰/۲)^۲}{۱۸۰/۲}+\frac{(۸۰-۶۷/۲)^۲}{۶۷/۲}+\frac{(۳۰۰-۳۱۲/۸)^۲}{۳۱۲/۸}=۸/۰۴$$

بیماری

جنسیت		دارد	ندارد	جمع
	دختر	۲۶	۱۹۳	۲۱۹
	پسر	۸۰	۳۰۰	۳۸۰
	جمع	۱۰۶	۴۹۳	۵۹۹

$$OR=\frac{۲۶\times ۳۰۰}{۸۰\times ۱۹۳}=۰/۵۱\ ,\ SE(\text{Ln } OR)=\sqrt{\frac{۱}{۲۶}+\frac{۱}{۱۹۳}+\frac{۱}{۸۰}+\frac{۱}{۳۰۰}}=۰/۲۴۴$$

$$EF=\exp(۱/۹۶\times ۰/۲۴۴)=۱/۶۱$$

$$OR \text{ کل } OR \text{ حدود اعتماد ۹۵ درصد برای: } \frac{۰/۵۱}{۱/۶۱}, ۰/۵۱\times ۱/۶۱=(۰/۳۲,۰/۸۲)$$

د)

	O_i	E_i	$V_i=\frac{n_{i۱}n_{i۲}c_{i۱}c_{i۲}}{n_i^۲(n_i-۱)}$
گروه سنی زیر ۷ سال	۱۷	۲۱/۲	۱۱/۷۰
گروه سنی بالای ۷ سال	۹	۱۶/۳	۷/۸۷
جمع	۲۶	۳۷/۵	۱۹/۵۷

بنابراین OR یک کاسه شده مانتل هنزل اختلاف معنی‌داری با یک دارد.

$$\chi^۲_{MH}=\frac{(۲۶-۳۷/۵)^۲}{۱۹/۵۷}=۶/۷۵>\chi^۲_{۰/۹۵}(۱)=۳/۸۴$$

$$OR_{MH}=\frac{\sum\frac{a_i d_i}{n_i}}{\sum\frac{b_i c_i}{n_i}}=\frac{۱۳/۲}{۲۴/۷}=۰/۵۳$$

$$SE(\text{Ln } OR_{MH})=\sqrt{\frac{V}{Q\times R}}=\sqrt{\frac{۱۹/۵۷}{۱۳/۲\times ۲۴/۷}}=۰/۲۴۵, EF=\exp(۱/۹۶\times ۰/۲۴۵)=۱/۶۲$$

$$OR_{MH} \text{ حدود اعتماد ۱۵ درصد برای: } \frac{۰/۵۳}{۱/۶۲}, ۰/۵۳\times ۱/۶۲=(۰/۳۳,۰/۸۶)$$

هـ)

$$\begin{cases} H_{\cdot}: \beta_{۱} = \cdot \\ H_{۱}: \beta_{۱} \neq \cdot \end{cases} \qquad z = \frac{\cdot/۶۳ - \cdot}{\cdot/۲۵} = ۲/۵۲ > z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = ۱/۹۶$$

بنابراین ضریب جنسیت اختلاف معنی‌داری با صفر نشان می‌دهد.

$$\begin{cases} H_{\cdot}: \beta_{۲} = \cdot \\ H_{۱}: \beta_{۲} \neq \cdot \end{cases} \qquad z = \frac{\cdot/۳۹ - \cdot}{\cdot/۲۳} = ۱/۷\cdot < ۱/۹۶$$

ضریب سن اختلاف معنی‌داری با صفر نشان نمی‌دهد.

و)

(جنسیت) $OR = e^{\beta_{۱}} = e^{\cdot/۶۳} = ۱/۸۸, EF = \exp(۱/۹۶ \times \cdot/۲۵) = ۱/۶۳$

(مرد به زن) جنس OR حدود اعتماد ۹۵ درصد برای: $\frac{۱/۸۸}{۱/۶۳}, ۱/۸۸ \times ۱/۶۳ = (۱/۱۵, ۳/\cdot۶)$

(سن) $OR = e^{\beta_{۲}} = e^{\cdot/۳۹} = ۱/۴۸, EF = \exp(۱/۹۶ \times \cdot/۲۳) = ۱/۵۷$

(زیر ۷ سال نسبت به بالای ۷ سال) سن OR حدود اعتماد ۹۵ درصد برای: $\frac{۱/۴۸}{۱/۵۸}, ۱/۴۸ \times ۱/۵۸ = (\cdot/۹۴, ۲/۳۴)$

ز)

$$\begin{cases} H_{\cdot}: \beta_{۱} = \beta_{۲} = \cdot \\ H_{۱}: \beta_{i} \neq \cdot \quad i = ۱,۲ \end{cases} \qquad \chi^{۲} = ۲ \times \left((۱ - ۲۷۳/۸۳) - (-۲۷۹/۵۹)\right) = ۱۱/۵۲ > \chi^{۲}_{\cdot/۹۵}(۲) = ۵/۹۹$$

بنابراین فرضیهٔ صفر معنی مساوی صفر بودن همزمان $\beta_{۱}, \beta_{۲}$ رد می‌شود.

پاسخ ۱۰-۱۰: الف)

$$\chi^{۲} = \frac{(b-c)^{۲}}{b+c} = \frac{(۲۳-۱۶)^{۲}}{۲۳+۱۶} = ۱/۲۶ > \chi^{۲}_{\cdot/۹۵}(۱) = ۳/۸۴$$

بنابراین گواه کافی مبنی بر رد فرضیهٔ صفر وجود ندارد.

$$OR = \frac{b}{c} = \frac{۲۳}{۱۶} = ۱/۴۴$$

ب)

$$SE(Ln\ OR) = \sqrt{\frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}} = \sqrt{\frac{۱}{۲۳} + \frac{۱}{۱۶}} = \cdot/۳۲۶, EF = \exp(۱/۹۶ \times \cdot/۳۲۶) = ۱/۸۹$$

OR حدود اعتماد ۹۵ درصد برای: $\frac{۱/۴۴}{۱/۸۹}\ ,\ ۱/۴۴ \times ۱/۸۹ = (\cdot/۷۶, ۲/۷۲)$

از آنجا که فاصله اطمینان مربوطه یک را شامل می‌شود بنابراین فرضیهٔ $H_{\cdot}$ رد نمی‌شود.

پاسخ ۱۰-۱۱: الف) ابتدا با استفاده از تعداد موارد مرگ و جمعیت وسط سال میزان های مرگ را در گروههای مختلف بدست آورده و با اعمال این میزانها در یک جمعیت فرضی ۱۰۰۰۰۰ نفری جدول عمر را تشکیل می دهیم.

از آنجا که اطلاعات برای گروه سنی ۱-۰ سال به صورت ماهیانه در اختیار نمی باشد از تقریب زیر برای محاسبه $_{1}L_{0}$ استفاده می شود:

$$_{1}L_{0} = ۰/۳l_{0} + ۰/۷l_{1}$$

ولی چون اطلاعات سال به سال برای گروه سنی ۴-۱ ارائه شده استفاده از فرمول تقریب $_{4}L_{1}$ آنچنان ضرورتی ندارد.

گروه سنی	$_nm_x$	$_nq_x$	$_nP_x$	l_x	l_{x+1}	$_nL_x$	Tx	e_x
۰-۱	۰/۱۳۳	۰/۱۲۵	۰/۸۷۵	۱۰۰۰۰۰	۸۷۵۰۰	۹۱۲۵۰	۴۸۴۴۱۵	۴/۸۴
۱-۲	۰/۱۴۰	۰/۱۳۱	۰/۸۶۹	۸۷۵۰۰	۷۶۰۵۱	۸۱۷۷۶	۳۹۳۱۶۵	۴/۴۹
۲-۳	۰/۱۴۳	۰/۱۳۳	۰/۸۶۷	۷۶۰۵۱	۶۵۹۱۱	۷۰۹۸۱	۳۱۱۳۸۹	۴/۰۹
۳-۴	۰/۱۵۸	۰/۱۴۶	۰/۸۵۴	۶۵۹۱۱	۵۶۲۶۶	۶۱۰۸۸	۲۴۰۴۰۸	۳/۶۵
۴-۵	۰/۱۴۳	۰/۱۳۳	۰/۸۶۷	۵۶۲۶۶	۴۸۷۶۴	۵۲۵۱۵	۱۷۹۳۱۹	۳/۱۹
۵-۶	۰/۱۸۸	۰/۱۷۱	۰/۸۲۹	۴۸۷۶۴	۴۰۴۰۴	۴۴۵۸۴	۱۲۶۸۰۵	۲/۶۰
۶-۷	۰/۲۹۲	۰/۲۵۵	۰/۷۴۵	۴۰۴۰۴	۳۰۱۱۹	۳۵۲۶۲	۸۲۲۲۱	۲/۰۳
۷-۸	۰/۵۰۰	۰/۴۰۰	۰/۶۰۰	۳۰۱۱۹	۱۸۰۷۲	۲۴۰۹۶	۴۶۹۵۹	۱/۵۶
۸-۹	۰/۶۶۷	۰/۵۰۰	۰/۵۰۰	۱۸۰۷۲	۹۰۳۶	۱۳۵۵۴	۲۲۸۶۳	۱/۲۷
۹-۱۰	۰/۷۵۰	۰/۵۴۵	۰/۴۵۵	۹۰۳۶	۴۱۰۷	۶۵۷۲	۹۳۱۰	۱/۰۳
۱۰-۱۱	۱/۰۰۰	۰/۶۶۷	۰/۳۳۳	۴۱۰۷	۱۳۶۹	۲۷۳۸	۲۷۳۸	۰/۶۷

ب) ۴/۸۴

ج) ۲/۰۳

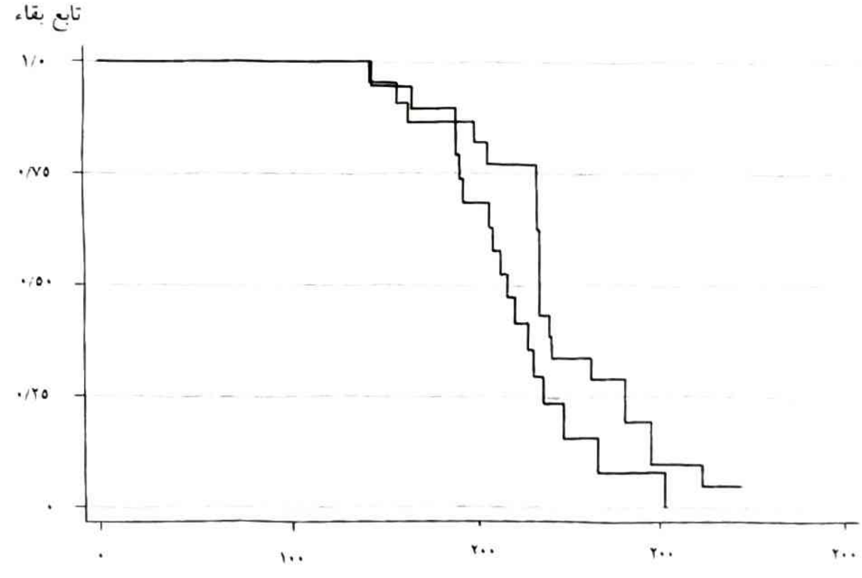
د) از ۵۶۲۶۶ فردی که در ابتدای سال چهارم زنده هستند تنها ۳۰۱۱۹ نفر در ابتدای سال هفتم زنده می مانند که این افراد اقلا سه سال دیگر عمر کرده اند. بنابراین این احتمال برابر است با:

$$p = \frac{۳۰۱۱۹}{۵۶۲۶۶} = ۰/۵۳۵$$

پاسخ ۱۰-۱۲:

برآورد کاپلان مایر تابع بقاء برای گروه اول به صورت زیر است که تابع بقاء برای هـر دو گـروه در منحنـی تابع بقاء نمایش داده شده است:

زمان	n_{1t}	d_{1t}	c_{1t}	p_{1t}	$S(t)$
۱۴۳	۱۹	۱	۰	۰/۹۴۷	۰/۹۴۷۴
۱۶۵	۱۸	۱	۰	۰/۹۴۴	۰/۸۹۴۷
۱۸۸	۱۷	۲	۰	۰/۸۸۲	۰/۷۸۹۵
۱۹۰	۱۵	۱	۰	۰/۹۳۳	۰/۷۳۶۸
۱۹۲	۱۴	۱	۰	۰/۹۲۹	۰/۶۸۴۲
۲۰۶	۱۳	۱	۰	۰/۹۲۳	۰/۶۳۱۶
۲۰۸	۱۲	۱	۰	۰/۹۱۷	۰/۵۷۸۹
۲۱۲	۱۱	۱	۰	۰/۹۰۹	۰/۵۲۶۳
۲۱۶	۱۰	۱	۱	۰/۹۰۰	۰/۴۷۳۷
۲۲۰	۸	۱	۰	۰/۸۷۵	۰/۴۱۴۵
۲۲۷	۷	۱	۰	۰/۸۵۷	۰/۳۵۵۳
۲۳۰	۶	۱	۰	۰/۸۳۳	۰/۲۹۶۱
۲۳۵	۵	۱	۰	۰/۸۰۰	۰/۲۳۶۸
۲۴۴	۴	۰	۱	۱/۰۰	۰/۲۳۶۸
۲۴۶	۳	۱	۰	۰/۶۶۷	۰/۱۵۷۹
۲۶۵	۲	۱	۰	۰/۵۰۰	۰/۰۷۸۹
۳۰۳	۱	۱	۰	۰/۰۰	۰/۰۰۰۰



روز	$n_{۲t}$	$d_{۲t}$	$n_{۱t}$	$d_{۱t}$	n_t	d_t	$\frac{d_t \times n_{۱t}}{n_t}$	$V_t = \frac{d_t \times n_{۱t} \times n_{۲t}}{n_t^۲} \times \frac{n_t - d_t}{n_t - ۱}$
۱۴۲	۲۲	۱	۱۹	۰	۴۱	۱	۰/۴۶۳	۰/۲۴۹
۱۴۳	۲۱	۰	۱۹	۱	۴۰	۱	۰/۴۷۵	۰/۲۴۹
۱۵۷	۲۱	۱	۱۸	۰	۳۹	۱	۰/۴۶۲	۰/۲۴۹
۱۶۳	۲۰	۱	۱۸	۰	۳۸	۱	۰/۴۷۴	۰/۲۴۹
۱۶۵	۱۹	۰	۱۸	۱	۳۷	۱	۰/۴۸۶	۰/۲۵۰
۱۸۸	۱۹	۰	۱۷	۲	۳۶	۲	۰/۹۴۴	۰/۴۸۴
۱۹۰	۱۹	۰	۱۵	۱	۳۴	۱	۰/۴۴۱	۰/۲۴۷
۱۹۲	۱۹	۰	۱۴	۱	۳۳	۱	۰/۴۲۴	۰/۲۴۴
۱۹۸	۱۹	۱	۱۳	۰	۳۲	۱	۰/۴۰۶	۰/۲۴۱
۲۰۴	۱۸	۰	۱۳	۰	۳۱	۰		
۲۰۵	۱۷	۱	۱۳	۰	۳۰	۱	۰/۴۳۳	۰/۲۴۶
۲۰۶	۱۶	۰	۱۳	۱	۲۹	۱	۰/۴۴۸	۰/۲۴۷
۲۰۸	۱۶	۰	۱۲	۱	۲۸	۱	۰/۴۲۹	۰/۲۴۵
۲۱۲	۱۶	۰	۱۱	۱	۲۷	۱	۰/۴۰۷	۰/۲۴۱
۲۱۶	۱۶	۰	۱۰	۱	۲۶	۱	۰/۳۸۵	۰/۲۳۷
۲۱۹	۱۶	۰	۸	۱	۲۴	۱	۰/۳۳۳	۰/۲۲۲
۲۲۷	۱۶	۰	۷	۱	۲۳	۱	۰/۳۰۴	۰/۲۱۲
۲۳۰	۱۶	۰	۶	۱	۲۲	۱	۰/۲۷۳	۰/۱۹۸
۲۳۲	۱۶	۳	۵	۰	۲۱	۳	۰/۷۱۴	۰/۴۹۰
۲۳۳	۱۳	۴	۵	۰	۱۸	۴	۱/۱۱۱	۰/۶۶۱
۲۳۵	۹	۰	۵	۱	۱۴	۱	۰/۳۵۷	۰/۲۳۰
۲۳۹	۹	۱	۴	۰	۱۳	۱	۰/۳۰۸	۰/۲۱۳
۲۴۰	۸	۱	۴	۰	۱۲	۱	۰/۳۳۳	۰/۲۲۲
۲۴۴	۷	۰	۴	۰	۱۱	۰		
۲۴۶	۷	۰	۳	۱	۱۰	۱	۰/۳۰۰	۰/۲۱۰
۲۶۱	۷	۱	۲	۰	۹	۱	۰/۲۲۲	۰/۱۷۳
۲۶۵	۶	۰	۲	۱	۸	۱	۰/۲۵۰	۰/۱۸۸
۲۸۰	۶	۲	۱	۰	۷	۲	۰/۲۸۶	۰/۲۰۴
۲۹۵	۴	۲	۱	۰	۵	۲	۰/۴۰۰	۰/۲۴۰
۳۰۳	۲	۰	۱	۱	۳	۱	۰/۳۳۳	۰/۲۲۲
۳۲۳	۲	۱	۰	۰	۲	۱	۰	۰
۳۴۴	۱	۰	۰	۰	۱	۰		
مجموع				۱۷			۱۲/۲۰۴	۷/۶۹۳

$$U = \sum (d_{1t} - E_{1t}) = \sum d_{1t} - \sum E_{1t} = ۱۷ - ۱۲/۲۰۴ = ٤/۷۹٦$$

$$\chi^2_{MC} = \frac{U^2}{V} = \frac{٤/۷۹٦^2}{۷/۳٦۲} = ۳/۱۲$$

که با مقایسه ۳/۱۲ با مقدار بحرانی توزیع کای دو با یک درجه آزادی (۳/۸٤) اختلاف دو تابع بقـاء معنـی دار نمی باشد.

پاسخ ۱۰-۱۳:

$$\text{نسبت دو میزان بروز} = \frac{\frac{۳۰}{۳۰۰}}{\frac{۲۰}{٤۰۰}} = \frac{۰/۱}{۰/۰۵} = ۲$$

$$SE(Ln(\text{Rate ratio})) = \sqrt{\frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{۲۰}} = ۰/۲۹$$

$$EF = \exp = \left(z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \times SE(Ln(\text{Rate ratio}) \right) = \exp(۱/۹٦ \times ۰/۲۹) = ۱/۷۷$$

$$\text{حدود اعتماد ۹۵ درصد برای Rate ratio} = \frac{۲}{۱/۷۷}, ۲ \times ۱/۷۷$$

با توجه به اینکه حدود اعتماد (۳/٥٤ و ۱/۱۳) عدد ۱ را شامل نمی‌شود بنابراین وضعیت ممکن نامناسب به طور معنی‌داری باعث افزایش ابتلا به عفونت حاد تنفسی شده است.

جداول آماری

جدول I - ضرایب دوجمله ای $C_n^x = \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}$

n \ x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
3	3	1	.	.	.	.	.	.	.
4	6	4	1	.	.	.	.	.	.
5	10	10	5	1	.	.	.	.	.
6	15	20	15	6	1	.	.	.	.
7	21	35	35	21	7	1	.	.	.
8	28	56	70	56	28	8	1	.	.
9	36	84	126	126	84	36	9	1	.
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

جدول II - تابع نمایی منفی (مقادیر e^{-x})

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0.0	1.000	1.5	0.223	3.0	0.050
0.1	0.905	1.6	0.202	3.1	0.045
0.2	0.819	1.7	0.183	3.2	0.041
0.3	0.741	1.8	0.165	3.3	0.037
0.4	0.670	1.9	0.150	3.4	0.033
0.5	0.607	2.0	0.135	3.5	0.030
0.6	0.549	2.1	0.122	3.6	0.027
0.7	0.497	2.2	0.111	3.7	0.025
0.8	0.449	2.3	0.100	3.8	0.022
0.9	0.407	2.4	0.091	3.9	0.020
1.0	0.368	2.5	0.082	4.0	0.018
1.1	0.333	2.6	0.074	4.5	0.011
1.2	0.301	2.7	0.067	5.0	0.007
1.3	0.273	2.8	0.061	6.0	0.002
1.4	0.247	2.9	0.055	7.0	0.001

جدول III – اعداد تصادفی

11164	36318	75061	37674	26320	75100	10431	20418	19228	91792
21215	91791	76831	58678	87054	31687	93205	43685	19732	08468
10438	44482	66558	37649	08882	90870	12462	41810	01806	02977
36792	26236	33266	66583	60881	97395	20461	36742	02852	50564
73944	04773	12032	51414	82384	38370	00249	80709	72605	67497
49563	12872	14063	93104	78483	72717	68714	18048	25005	04151
64208	48237	41701	73117	33242	42314	83049	21933	92813	04763
51486	72875	38605	29341	80749	80151	33835	52602	79147	08868
99756	26360	64516	17971	48478	09610	04638	17141	09227	10606
71325	55217	13015	72907	00431	45117	33827	92873	02953	85474
65285	97198	12138	53010	94601	15838	16805	61004	43516	17020
17264	57327	38224	29301	31381	38109	34976	65692	98566	29550
95639	99754	31199	92558	68368	04985	51092	37780	40261	14479
61555	76404	86210	11808	12841	45147	97438	60022	12645	62000
78137	98768	04689	87130	79225	08153	84967	64539	79493	74917
62490	99215	84987	28759	19177	14733	24550	28067	68894	38490
24216	63444	21283	07044	92729	37284	13211	37485	10415	36457
16975	95428	33226	55903	31605	43817	22250	03918	46999	98501
59138	39542	71168	57609	91510	77904	74244	50940	31553	62562
29478	59652	50414	31966	87912	87154	12944	49862	96566	48825
96155	95009	27429	72918	08457	78134	48407	26061	58754	05326
29621	66583	62966	12468	20245	14015	04014	35713	03980	03024
12639	75291	71020	17265	41598	64074	64629	63293	53307	48766
14544	37134	54714	02401	63228	26831	19386	15457	17999	18306
83403	88827	09834	11333	68431	31706	26652	04711	34593	22561
67642	05204	30697	44806	96989	68403	85621	45556	35434	09532
64041	99011	14610	40273	09482	62864	01573	82274	81446	32477
17048	94523	97444	59904	16936	39384	97551	09620	63932	03091
93039	89416	52795	10631	09728	68202	20963	02477	55494	39563
82244	34392	96607	17220	51984	10753	76272	50985	97593	34320
96990	55244	70693	25255	40029	23289	48819	07159	60172	81697
09119	74803	97303	88701	51380	73143	98251	78635	27556	20712
57666	41204	47589	78364	38266	94393	70713	53388	79865	92069
46492	61594	26729	58272	81754	14648	77210	12923	53712	87771
08433	19172	08320	20839	13715	10597	17234	39355	74816	03363
10011	75004	86054	41190	10061	19660	03500	68412	57812	57929
92420	65431	16530	05547	10683	88102	30176	84750	10115	69220
35542	55865	07304	47010	43233	57022	52161	82976	47981	46588
86595	26247	18552	29491	33712	32285	64844	69395	41387	87195

جدول *III* - اعداد تصادفی (دنباله)

40603	16152	83235	37361	98783	24838	39793	80954	76865	32713
40941	53585	69958	60916	71018	90561	84505	53980	64735	85140
73505	83472	55953	17957	11446	22618	34771	25777	27064	13526
39412	16013	11442	89320	11307	49396	39805	12249	57656	88686
57994	76748	54627	48511	78646	33287	35524	54522	08795	56273
61834	59199	15469	82285	84164	91333	90954	87186	31598	25942
91402	77227	79516	21007	58602	81418	87838	18443	76162	51146
58299	83880	20125	10794	37780	61705	18276	99041	78135	99661
40684	99948	33880	76413	63839	71371	32392	51812	48248	96419
75978	64298	08074	62055	73864	01926	78374	15741	74452	49954
34556	39861	88267	76068	62445	64361	78685	24246	27027	48239
65990	57048	25067	77571	77974	37634	81564	98608	37224	49848
16381	15069	25416	87875	90374	86203	29677	82543	37554	89179
52458	88880	78352	67913	09245	47773	51272	06976	99571	33365
33007	85607	92008	44897	24964	50559	79549	85658	96865	24186
38712	31512	08588	61490	72294	42862	87334	05866	66269	43158
58722	03678	19186	69602	34625	75958	56869	17907	81867	11535
26188	69497	51351	47799	20477	71786	52560	66827	79419	70886
12893	54048	07255	86149	99090	70958	50775	31768	52903	27645
33186	81346	85095	37282	85536	72661	32180	40229	19209	74939
79893	29448	88392	54211	61708	83452	61227	81690	42265	20310
48449	15102	44126	19438	23382	14985	37538	30120	82443	11152
94205	04259	68983	50561	06902	10269	22216	70210	60736	58772
38648	09278	81313	77400	41126	52614	93613	27263	99381	49500
04292	46028	75666	26954	34979	68381	45154	09314	81009	05114
17026	49737	85875	12139	59391	81830	30185	83095	78752	40899
48070	76848	02531	97737	10151	18169	31709	74842	85522	74092
30159	95450	83778	46115	99178	97718	98440	15076	21199	20492
12148	92231	31361	60650	54695	30035	22765	91386	70399	79270
73838	77067	24863	97576	01139	54219	02959	45696	98103	78867
73547	43759	95632	39555	74391	07579	69491	02647	17050	49869
07277	93217	79421	21769	83572	48019	17327	99638	87035	89300
65128	48334	07493	28098	52087	55519	83718	60904	48721	17522
38716	61380	60212	05099	21210	22052	01780	36813	19528	07727
31921	76458	73720	08657	74922	61335	41690	41967	50691	30508
57238	27464	61487	52329	26150	79991	64398	91273	26824	94827
24219	41090	08531	61578	08236	41140	76335	91189	66312	44000
31309	49387	02330	02476	96074	33256	48554	95401	02642	29119
20750	97024	72619	66628	66509	31206	55293	24249	02266	39010

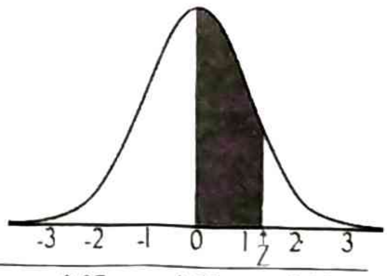
جدول III - اعداد تصادفی (دنباله)

37100	62492	63642	47638	13925	80113	88067	42575	44078	62703
53406	13855	38519	29500	62479	01036	87964	44498	07793	21599
55172	81556	18856	59043	64315	38270	25677	01965	21310	28115
40353	84807	47767	46890	16053	32415	60259	99788	55924	22077
18899	09612	77541	57675	70153	41179	97535	82889	27214	03482
68141	25340	92551	11326	60939	79355	41544	88926	09111	86431
51559	91159	81310	63251	91799	41215	87412	35317	74271	11603
92214	33386	73459	79359	65867	39269	57527	69551	17495	91456
15089	50557	33166	87094	52425	21211	41876	42525	36625	63964
96461	00604	11120	22254	16763	19206	67790	88362	01880	37911
28177	44111	15705	73835	69399	33602	13660	84342	97667	80847
66953	44737	81127	07493	07861	12666	85077	95972	96556	80108
19712	27263	84575	49820	19837	69985	34931	67935	71903	82560
68756	64757	19987	92222	11691	42502	00952	47981	97579	93408
75022	65332	98606	29451	57349	39219	08585	31502	96936	96356
11323	70069	90269	89266	46413	61615	66447	49751	15836	97343
55208	63470	18158	25283	19335	53893	87746	72531	16826	52605
11474	08786	05594	67045	13231	51186	71500	50498	59487	48677
81422	86842	60997	79669	43804	78690	58358	87639	24427	66799
21771	75963	23151	90274	08275	50677	99384	94022	84888	80139
42278	12160	32576	14278	34231	20724	27908	02657	19023	07190
17697	60114	63247	32096	32503	04923	17570	73243	76181	99343
05686	30243	34124	02936	71749	03031	72259	26351	77511	00850
52992	46650	89910	57395	39502	49738	87854	71066	84596	33115
94518	93984	81478	67750	89354	01080	25988	84359	31088	13655
00184	72186	78906	75480	71140	15199	69002	08374	22126	23555
87462	63165	79816	61630	50140	95319	79205	79202	67414	60805
88692	58716	12273	48176	86038	78474	76730	82931	51595	20747
20094	42962	41382	16768	13261	13510	04822	96354	72001	68642
60935	81504	50520	82153	27892	18029	79663	44146	72876	67843
51392	85936	43898	50596	81121	98122	69196	54271	12059	62539
54239	41918	79526	46274	24853	67165	12011	04923	20273	89405
57892	73394	07160	90262	48731	46648	70977	58262	78359	50436
02330	74736	53274	44468	53616	35794	54838	39114	68302	26855
76115	29247	55342	51299	79908	36613	68361	18864	13419	34950
63312	81886	29085	20101	38037	34742	78364	39356	40006	49800
27632	21570	34274	56426	00330	07117	86673	46455	66866	76374
06335	62111	44014	52567	79480	45886	92585	87828	17376	35254
64142	87676	21358	88773	10604	62834	63971	03989	21421	76086

جدول III - اعداد تصادفی (دنباله)

54723	56527	53076	38235	42780	22716	36400	48028	78196	92985
84828	81248	25548	34075	43459	44628	21866	90350	82264	20478
65799	01914	81363	05173	23674	41774	25154	73003	87031	94368
87917	38549	48213	71708	92035	92527	55484	32274	87918	22455
26907	88173	71189	28377	13785	87469	35647	19695	33401	51998
68052	65422	88460	06352	42379	55499	60469	76931	83430	24560
42587	68149	88147	99700	56124	53239	38726	63652	36644	50876
97176	55416	67642	05051	89931	19482	80720	48977	70004	03664
53295	87133	38264	94708	00703	35991	76404	82249	22942	49659
23011	94108	29196	65187	69974	01970	31667	54307	40032	30031
75768	49549	24543	63285	32803	18301	80851	89301	02398	99891
86668	70341	66460	75648	78678	27770	30245	44775	56120	44235
56727	72036	50347	33521	05068	47248	67832	30960	95465	32217
27936	78010	09617	04408	18954	61862	64547	52453	83213	47833
31994	69072	37354	93025	38934	90219	91148	62757	51703	84040
02985	95303	15182	50166	11755	56256	89546	31170	87221	63267
89965	10206	95830	95406	33845	87588	70237	84360	19629	72568
45587	29611	98579	42481	05359	36578	56047	68114	58583	16313
01071	08530	74305	77509	16270	20889	99753	88035	55643	18291
90209	68521	14293	39194	68803	32052	39413	26883	83119	69623
04982	68470	27875	15480	13206	44784	83601	03172	07817	01520
19740	24637	97377	32112	74283	69384	49768	64141	02024	85380
50197	79869	86497	68709	42073	28498	82750	43571	77075	07123
46954	67536	28968	81936	95999	04319	09932	66223	45491	69503
82549	62676	31123	49899	70512	95288	15517	85352	21987	8669
61798	81600	80018	84742	06103	60786	01408	75967	29948	21454
57666	29055	46518	01487	30136	14349	56159	47408	78311	25896
29805	64994	66872	62230	41385	58066	96600	99301	85976	84194
06711	34939	19599	76247	87879	97114	74314	39599	43544	36255
13934	46885	58315	88366	06138	37923	11192	90757	10831	01580
28549	98327	99943	25377	17628	65468	07875	16728	22602	33892
40871	61803	25767	55484	90997	86941	64027	01020	39518	34693
47704	38355	71708	80117	11361	88875	22315	38048	42891	87885
62611	19698	09304	29265	07636	08508	23773	56545	08015	28891
03047	83981	11916	09267	67316	87952	27045	62536	32180	60936
26460	50501	31731	18938	11025	18515	31747	96828	58258	97107
01764	25959	69293	89875	72710	49659	66632	25314	95260	22146
11762	54806	02651	52912	32770	64507	59090	01275	47624	16124
31736	31695	11523	64213	91190	10145	34231	36405	65860	48771

جدول *IV*- سطح زیر منحنی نرمال از نقطه ۰ تا Z



سطح زیر منحنی برای مقادیر منفی از Z، بر اساس قرینگی محاسبه می شود

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

جدول V- توزیع t استودنت

df	$t_{.60}$	$t_{.70}$	$t_{.80}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.990}$	$t_{.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
df	$-t_{.40}$	$-t_{.30}$	$-t_{.20}$	$-t_{.10}$	$-t_{.05}$	$-t_{.025}$	$-t_{.010}$	$-t_{.005}$

جدول VI - توزیع F

$F_{.90}(f_1, f_2)$

$df_2 \backslash df_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

جدول VI - توزیع F (دنباله)

$F_{.95}(f_1, f_2)$

$df_2 \backslash df_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.31
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

جدول VI - توزیع F (دنباله)

$$F_{.975}(f_1, f_2)$$

$df_2 \backslash df_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001.4	1005.6	1009.8	1014.0	1018.3
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.47	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.73
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.45	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.95	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

جدول VI - توزیع F (دنباله)

$F_{.99}(f_1, f_2)$

$df_2 \backslash df_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.7	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5	6055.8	6106.3	6157.3	6208.7	6234.6	6260.6	6286.8	6313.0	6339.4	6365.9
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.51	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.93	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.67	3.59	3.51	3.43	3.34	3.26	3.17
14	8.86	6.52	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.90	3.81	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.85	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.02	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.93	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.70	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.77	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.59	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.05	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.01	2.87	2.73	2.57	2.50	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.67	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.81
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.04	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.19	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.33	1.00

جدول VI- توزیع F (دنباله)

$$F_{.995}(f_1, f_2)$$

$df_2 \backslash df_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359	25465
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5
3	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99	41.83
4	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47	19.32
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38	13.15	12.9	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.14
6	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88
7	16.24	12.4	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.64	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95
9	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64
11	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.45	4.34	4.23
12	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90
13	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44
15	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26
16	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11
17	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98
18	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
26	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33
27	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29
28	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25
29	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.21
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00

جدول VI - توزیع F (دنباله)

$$F_{.999}(f_1, f_2)$$

$df_2 \backslash df_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	405284	500000	540379	562500	576405	585937	592873	598144	602284	605621	610668	615764	620908	623497	626099	628712	631337	633972	636619
2	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	125.00	124.5	124.0	123.5
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47	48.05	47.41	46.76	46.10	45.77	45.43	45.09	44.75	44.40	44.05
5	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.83	28.16	27.65	27.24	26.92	26.42	25.91	25.39	25.13	24.87	24.60	24.33	24.06	23.79
6	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.46	19.03	18.69	18.41	17.99	17.56	17.12	16.90	16.67	16.44	16.21	15.98	15.75
7	29.25	21.69	18.77	17.20	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33	14.08	13.71	13.32	12.93	12.73	12.53	12.33	12.12	11.91	11.70
8	25.41	18.49	15.83	14.39	13.48	12.86	12.40	12.05	11.77	11.54	11.19	10.84	10.48	10.30	10.11	9.92	9.73	9.53	9.33
9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.19	8.00	7.81
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.92	9.52	9.20	8.96	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.12	6.94	6.76
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.63	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.35	6.18	6.00
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.76	5.59	5.42
13	17.82	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98	6.80	6.52	6.23	5.93	5.78	5.63	5.47	5.30	5.14	4.97
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.58	6.40	6.13	5.85	5.56	5.41	5.25	5.10	4.94	4.77	4.60
15	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.64	4.47	4.31
16	16.12	10.97	9.01	7.94	7.27	6.81	6.46	6.19	5.98	5.81	5.55	5.27	4.99	4.85	4.70	4.54	4.39	4.23	4.06
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75	5.58	5.32	5.05	4.78	4.63	4.48	4.33	4.18	4.02	3.85
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39	5.13	4.87	4.59	4.45	4.30	4.15	4.00	3.84	3.67
19	15.08	10.16	8.28	7.26	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39	5.22	4.97	4.70	4.43	4.29	4.14	3.99	3.84	3.68	3.51
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.86	3.70	3.54	3.38
21	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11	4.95	4.70	4.44	4.17	4.03	3.88	3.74	3.58	3.42	3.26
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99	4.83	4.58	4.33	4.06	3.92	3.78	3.63	3.48	3.32	3.15
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89	4.73	4.48	4.23	3.96	3.82	3.68	3.53	3.38	3.22	3.05
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.29	3.14	2.97
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.71	4.56	4.31	4.06	3.79	3.66	3.52	3.37	3.22	3.06	2.89
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64	4.48	4.24	3.99	3.72	3.59	3.44	3.30	3.15	2.99	2.82
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.71	5.31	5.00	4.76	4.57	4.41	4.17	3.92	3.66	3.52	3.38	3.23	3.08	2.92	2.75
28	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50	4.35	4.11	3.86	3.60	3.46	3.32	3.18	3.02	2.86	2.69
29	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45	4.29	4.05	3.80	3.54	3.41	3.27	3.12	2.97	2.81	2.64
30	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	3.07	2.92	2.76	2.59
40	12.61	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3.64	3.40	3.14	3.01	2.87	2.73	2.57	2.41	2.23
60	11.97	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.87	3.69	3.54	3.31	3.08	2.83	2.69	2.55	2.41	2.25	2.08	1.89
120	11.38	7.32	5.79	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	1.95	1.76	1.54
∞	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.66	1.45	1.00

جدول VII - توزیع χ^2 (دنباله)

df	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999
1	0.455	0.708	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	1.39	1.83	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	2.37	2.95	3.67	4.64	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	3.36	4.04	4.88	5.99	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	4.35	5.13	6.06	7.29	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	5.35	6.21	7.23	8.56	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	6.35	7.28	8.38	9.80	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	7.34	8.35	9.52	11.0	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	8.34	9.41	10.7	12.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	9.34	10.5	11.8	13.4	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	10.3	11.5	12.9	14.6	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	11.3	12.6	14.0	15.8	18.6	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	12.3	13.6	15.1	17.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	13.3	14.7	16.2	18.2	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	14.3	15.7	17.3	19.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	15.3	16.8	18.4	20.5	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	16.3	17.8	19.5	21.6	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	17.3	18.9	20.6	22.8	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	18.3	19.9	21.7	23.9	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	19.3	21.0	22.8	25.0	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	20.3	22.0	23.9	26.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	21.3	23.0	24.9	27.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	22.3	24.1	26.0	28.4	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	23.3	25.1	27.1	29.6	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	24.3	26.1	28.2	30.7	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	25.3	27.2	29.2	31.8	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	26.3	28.2	30.3	32.9	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	27.3	29.2	31.4	34.0	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	28.3	30.3	32.5	35.1	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	29.3	31.3	33.5	36.3	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
35	34.3	36.5	38.9	41.8	46.1	49.8	53.2	57.3	60.3	66.6
40	39.3	41.6	44.2	47.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
45	44.3	46.8	49.5	52.7	57.5	61.7	65.4	70.0	73.2	80.1
50	49.3	51.9	54.7	58.2	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
75	74.3	77.5	80.9	85.1	91.1	96.2	100.8	106.4	110.3	118.6
100	99.3	102.9	106.9	111.7	118.5	124.3	129.6	135.6	140.2	149.4

جدول VII - توزیع χ^2

df	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.0642	0.148	0.275
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.446	0.713	1.02
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.00	1.42	1.87
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.65	2.19	2.75
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.34	3.00	3.66
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	4.57
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	5.49
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	6.42
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	7.36
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	8.30
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	9.24
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	10.2
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	11.1
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.8	12.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.3	11.7	13.0
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.2	12.6	14.0
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.0	13.5	14.9
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	12.9	14.4	15.9
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	13.7	15.4	16.9
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	14.6	16.3	17.8
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	15.4	17.2	18.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	16.3	18.1	19.7
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	17.2	19.0	20.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	18.1	19.9	21.7
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	18.9	20.9	22.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	19.8	21.8	23.6
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	20.7	22.7	24.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	21.6	23.6	25.5
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	22.5	24.6	26.5
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	23.4	25.5	27.4
35	17.2	18.5	20.6	22.5	24.8	27.8	30.2	32.3
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	32.3	34.9	37.1
45	24.3	25.9	28.4	30.6	33.4	36.9	39.6	42.0
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	41.4	44.3	46.9
75	47.2	49.5	52.9	56.1	59.8	64.5	68.1	71.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	87.9	92.1	95.8

جدول $VIII$ - تبدیل r به ω

$$\omega = \frac{1}{2} Ln \frac{1+r}{1-r}$$

r	ω	r	ω	r	ω	r	ω
0.00	0.000	0.25	0.255	0.50	0.549	0.75	0.973
0.01	0.010	0.26	0.266	0.51	0.563	0.76	0.996
0.02	0.020	0.27	0.277	0.52	0.576	0.77	1.020
0.03	0.030	0.28	0.288	0.53	0.590	0.78	1.045
0.04	0.040	0.29	0.299	0.54	0.604	0.79	1.071
0.05	0.050	0.30	0.310	0.55	0.618	0.80	1.099
0.06	0.060	0.31	0.321	0.56	0.633	0.81	1.127
0.07	0.070	0.32	0.332	0.57	0.648	0.82	1.157
0.08	0.080	0.33	0.343	0.58	0.662	0.83	1.188
0.09	0.090	0.34	0.354	0.59	0.678	0.84	1.221
0.10	0.100	0.35	0.365	0.60	0.693	0.85	1.256
0.11	0.110	0.36	0.377	0.61	0.709	0.86	1.293
0.12	0.121	0.37	0.388	0.62	0.725	0.87	1.333
0.13	0.131	0.38	0.400	0.63	0.741	0.88	1.376
0.14	0.141	0.39	0.412	0.64	0.758	0.89	1.422
0.15	0.151	0.40	0.424	0.65	0.775	0.90	1.472
0.16	0.161	0.41	0.436	0.66	0.793	0.91	1.528
0.17	0.172	0.42	0.448	0.67	0.811	0.92	1.589
0.18	0.182	0.43	0.460	0.68	0.829	0.93	1.658
0.19	0.192	0.44	0.472	0.69	0.848	0.94	1.738
0.20	0.203	0.45	0.485	0.70	0.867	0.95	1.832
0.21	0.213	0.46	0.497	0.71	0.887	0.96	1.946
0.22	0.224	0.47	0.510	0.72	0.908	0.97	2.092
0.23	0.234	0.48	0.523	0.73	0.929	0.98	2.298
0.24	0.245	0.49	0.536	0.74	0.950	0.99	2.647

منابع

Refrences

1. Afifi, A.A., Azens, S.P., Statistical Analysis, Academic Press, New York and London, 1972.
2. Bennett, C.A., and Franklin, N.L., Statistical Analysis in Chemistry and Chemical Industry, Wiley, New York, 1954.
3. Brownlee, K.A., Statistical Theory and Methodology in science and Engineering, 2nd ed., Wiley, New York, 1965.
4. Cochran, W.G., Sampling Techniques, Wiley, New York, 1967.
5. Dixon, W.J., and Massey, F.J., Jr., Introduction to Statistical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1969.
6. Draper, N.R., and Smith. H., Applied Regression Analysis. Wiley, New York, 1966.
7. Dunn, O.A., Clark, V.A., Applied Statistics: Analysis of Variance and Regression, Wiley, New York, 1974.
8. Dunn, O.J., Basic Statistics: A primer for the Biomedical Sciences, Wiley, New York, 1967.
9. Fleiss, J., The Design and Analysis of Clinical Experiments, Wiley, New York, 1999.
10. Hoel, P.G., Jessen, R.J., Basic Statistics for Business and Economics, Wiley, New York, 1971.
11. Jewell, N.P., Statistics for Epidemology, Chopman & Hall, London, 2004.
12. Johannes, I., Polly, F., Bancroft's Introduction to Biostatistics, Harper & Row, New York, Evanston, and London, 1975.
13. Kirkwood, B., Sterne, J. A., Essentials of Medical Statistics, Blackwell Science, 2003.
14. Agresti, A., An Introduction to Categorical Data Analysis, Wiley, New York, 2007.
15. Machin, D., Medical Statistics, Wiley, New York, 1999.
16. Rosner, B., Fundamentals of Biostatistics Experiments, THOMSON BROOKS/COLE, Boston, 2006 .
17. Scheffe, H. The Analysis of variance, Wiley, New York, 1967.

منابع و مآخذ فارسی

۱. خواجه نوری، عباسقلی- آمار پیشرفته و بیومتری، نشریه شماره ۱۱۷۵، دانشگاه تهران، ۱۳۴۷.

۲. مدنی، علی- تئوری احتمالات، نشریه شماره ۵، مدرسه عالی بیمه تهران، ۱۳۵۳.

۳. مدنی، علی- آنالیز آماری، نشریه شماره ۱۱، مدرسه عالی بیمه تهران، ۱۳۵۴.

۴. نهاپتیان، وارتکس- آمار در پزشکی و بهداشت، نشریه شماره ۱۱۶۲ دانشگاه تهران ۱۳۴۶.

۵. نهاپتیان، وارتکس- خزانه، حبیب- میزانهای حیاتی ایران، نشریه شماره ۱۹۹۲ دانشگاه تهران (دانشکده بهداشت و انستیتو تحقیقات بهداشتی)، ۱۳۵۶.

واژه نامه

Abridged	مختصر
Abridged life table	جدول عمر خلاصه شده
Absolute	مطلق
Absolute frequency	فراوانی مطلق
Adjusted	تطبیق شده
Agresti-Coull confidence interval	فاصله اطمینان اگرستی کول
Alternative hypothesis	فرضیه مخالف
Analysis	آنالیز
Analysis of variance	آنالیز واریانس
Arithmetic	حسابی
Arithmetic mean	میانگین حسابی
Average	متوسط
Backward	پسرو
Backward-stepwise	پسرو گام به گام
Bar diagram	نمودار نرده ای
Bayes formula	فرمول بیز
Bernoulli distribution	توزیع برنولی
Bias	تورش ، اریبی
Biased	تور، اوریب
Binomial	دوجمله ای
Binomial distribution	توزیع دوجمله ای
Bonferroni multiple comparison method	روش مقایسه چندگانه بن فرونی

Case-control	مورد-شاهدی
Census	سرشماری
Chi-square	کای دو
Class limits	کرانه های گروه
Classification	طبقه بندی، گروه بندی
Coefficient	ضریب
Coefficient of correlation	ضریب همبستگی
Coefficient of variation	ضریب تغییرات
Coefficient of determination	ضریب تعیین
Cohort	همگروهی
Cohort life table	جدول عمر همگروهی
Combination	ترکیب
Comparison	مقایسه
Conditional	شرطی
Conditional probability	احتمال شرطی
Confidence	اطمینان، اعتماد
Confidence interval	حدود اطمینان، حدود اعتماد
Contingency	توافق
Contingency table	جدول توافق
Continuous	پیوسته
Contrast	کانتراست
Correlation	همبستگی
Covariance	کوواریانس
Cross-sectional	مقطعی
Cumulative	تجمعی
Cumulative frequency	فراوانی تجمعی
Cumulative incidence (Risk)	بروز تجمعی (خطر)
Current life table	جدول عمر جاری

Data	داده ها، اطلاعات
Degrees of freedom	درجه آزادی
Deviation	انحراف
Direct standardization	تطبیق به روش مستقیم
Discrete	گسسته، ناپیوسته
Dispersion	پراکندگی
Distribution	توزیع، پخش
Dummy variable	متغیر ظاهری
Ecologic	اکولوژیک
Error	اشتباه، خطا
Error factor	فاکتور خطا
Estimation	برآورد، تخمین
Event	حادثه
Expectation	امید، امید ریاضی
Expected	منتظره
Expected value	امید ریاضی
Experiment	آزمایش
Factor	عامل
Finite	محدود
Finite population	جامعه محدود
Fisher exact test	آزمون دقیق فیشر
Forward-stepwise	پیشرو گام به گام
Frequency	فراوانی
Cohort life table	جدول عمر همگروهی
Contrast	کانتراست

Current life table	جدول عمر جاری
Geometric	هندسی
Geometric mean	میانگین هندسی
Goodness of fit	تطابق نمونه باتوزیع نظری، نیکوئی برازیدن
Hazard function	تابع مخاطره
Health indices	شاخص های بهداشیت
Histogram	هیستوگرام، نمودار مستطیل
Hypergeometric distribution	توزیع فوق هندسی
Hypothesis	فرضیه
Incidence	وقوع، بروز
Incidence rate	میزان بروز
Independent	نابسته (مستقل)
Indirect standardization	تطبیق به روش غیرمستقیم
Individual matching	جورکردن فرد به فرد
Inference	استنتاج
Infinite	نامحدود
Infinite population	جامعه نامحدود
Instantaneous incidence rate	میزان بروز لحظه ای
Interaction	اثر متقابل
Interval	فاصله
Interval estimate	برآورد فاصله ای
Interventional	مداخله ای
Kaplan-Meier method	روش کاپلان مایر
Kruskal-Wallis test	آزمون کروسکال والیس

Least squares	حداقل مربعات، حداقل مجذورات
Life table	جدول عمر
Likelihood function	تابع درستنمایی
Linear	خطی
Linear combination	ترکیب خطی
Logit	لوژیت، لوجیت
Log-rank	لگ رنک
Mann-Whitney-Wilcoxon test	آزمون من-ویتنی - ویلکاکسون
Mantel-Cox	مانتل کوکس
Mantel and Haenszel	مانتل و هنزل
Matched	جورشده
Mathematical expectation	امید ریاضی
McNemar-test	آزمون مک - نمار
Mean	میانگین
Mean deviation	میانگین انحرافات
Mean squares	میانگین مجذورات
Measure of central value	شاخص های مرکزی
Measure of dispersion	شاخص های پراکندگی
Median	میانه
Mode	نما
Mortality	مرگ
Multiple	چندگانه
Multiple comparison	مقایسه چندگانه
Multiple regression	رگرسیون چندمتغیره
Mutually exclusive	ناسازگار
Negative predictive value	ارزش اخباری منفی
Nominal	اسمی

Nonparametric	بدون پارامتر، ناپارامتری
Normal	نرمال
Null hypothesis	فرضیه صفر
Observation	مشاهده
Observational	مشاهده ای
Observed	مشاهده شده
Odds	برتری، شانس
Odds ratio	نسبت برتری، نسبت شانس
Ordinal	رتبه ای
Paired	زوج
Paired observation	مشاهدات دوتایی
Pearson's correlation coefficient	ضریب همبستگی پیرسون
Pie diagram	نمودار دایره ای
Point Estimate	برآورد نقطه ای
Point prevalence	شیوع لحظه ای
Poisson distribution	توزیع پواسن
Polygon	چندگوش
Pooled estimate of variance	برآورد ترکیبی واریانس
Population	جامعه، جمعیت
Positive predictive value	ارزش اخباری مثبت
Prevalence	شیوع
Probability	احتمال
Random	تصادفی
Random sample	نمونه تصادفی
Random sampling	نمونه گیری تصادفی

Random variable	کمیت تصادفی
Range	طول میدان تغییرات
Rank	رتبه
Rate	میزان
Ratio	نسبت
Regression	رگرسیون
Relative	نسبی
Relative frequency	فراوانی نسبی
Residual	باقیمانده
Restriction	محدودکردن
Risk factor	عامل خطر
Sample	نمونه
Sampling	نمونه گیری
Scatter diagram	نمودار پراکنش
Scheffe multiple comparison method	روش مقایسه چندگانه شفه
Sensitivity	حساسیت
Significant	معنی دار
Simple random sampling	نمونه گیری تصادفی ساده
Spearman correlation coefficient	ضریب همبستگی اسپیرمن
Specificity	ویژگی
Standard	استاندارد، معیار
Standard deviation	انحراف معیار
Standard Error	خطای معیار
Standard population	جمعیت معیار
Standard mortality ratio	نسبت مرگ معیار
Statistic	آماره، تابع نمونه
Statistical	آماری

Statistical hypothesis	فرضیه اماری
Statistics	آمار
Stem and Leaf	ساقه و برگ
Sum of squares	مجموع مجذورات
Survival analysis	تحلیل بقاء
Tail	دامنه
Test	آزمون
Theoretical	نظری
Transformation	تغییر متغیر، تبدیل
Trial	کارآزمایی
Unbiased	ناتور یا نااریب
Uncorrelated	ناهمبسته
Variance	واریانس
Wald statistic	آماره والد
Wilcoxon signed rank test	آزمون رتبه علامت دار ویلکاکسون
Yates continuity correction	تصحیح پیوستگی یتس

STATISTICAL METHODS

and

HEALTH INDICES